

## ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ С ОБЩИМ КРИТЕРИЕМ ОПТИМИЗАЦИИ

© Р.В. Миненко, 2011

*Криворожский государственный педагогический университет, Кривой Рог, Украина*

An iterative method for the solving of linear and nonlinear inverse problem of gravimetry and magnetometry was developed. It is based on a partnering of two fields in the boundaries mismatch of dense and magnetic anomalous objects.

**Keywords:** inverse problem, gravimetry, magnetometry, iteration, criterion of optimization, interpretation model.

Известны методы совместного решения объединенной обратной линейно-нелинейной задачи гравиметрии и магнитометрии (ООЛНЗГМ) [1–3], которые при отсутствии общих плотностных и магнитоактивных границ могут дать эквивалентное, чаще всего геологически недостаточно содержательное решение [1, 2] или основаны на использовании техногенно-геофизических критериев, что связано с привлечением информации по третьим методам [3] и дополнительными затратами.

Цель настоящей работы – создание метода решения ООЛНЗГМ для общего случая несовпадения плотностных и магнитоактивных границ, с использованием информации только по гравиметрии и магнитометрии.

Поставленная цель достигается тем, что в фильтративном методе решения обратной задачи (ОЗ) для двух сеточно-блоковых интерпретационных моделей (СБИМ), объединенных одним общим критерием оптимизации (КО) [4], в одной модели находят неизвестные аномальные плотности (АП) блоков горных пород и глубины до них по полю силы тяжести (ПСЖ), а в другой – интенсивности намагничивания (ИН) и, как правило, другие глубины до магнитных блоков по магнитному полю (МП). В результате получают новую СБИМ, содержащую два поля и два вектора начальных условий по АП и ИН при одних и тех же горизонтальных размерах блоков, но разных глубинах до них, которые в процессе оптимизации должны приближаться к реальному местоположению границ в геологической среде. В дальнейшем при построении методов решения обратных задач будем придерживаться обозначений, изложенных в статье [1], как в базовых методах. Поэтому известные формулы и обозначения запишем в кратком перечислении без подробных пояснений:

а) итерационные формулы для АП ( $\sigma_{i,n,1}$ ), ИН ( $J_{i,n,2}$ ) и глубин ( $h_{i,n,1}$ ,  $h_{i,n,2}$ ) до границ слоев с итерационными коэффициентами (ИК)  $\tau_{1,n+1}$ ,  $\tau_{2,n+1}$ ,  $\mu_{1,n+1}$ ,  $\mu_{2,n+1}$  и итерационными поправками (ИП) ( $B_{i,n,1}$ ,  $B_{i,n,2}$ ,  $C_{i,n,1}$ ,  $C_{i,n,2}$ ), вычисляемыми на каждой итерации с номером  $n$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{i,n+1,1} &= \sigma_{i,n,1} - \tau_{1,n+1} B_{i,n,1}; & B_{i,n,1} &= \sum_i a_{ij,n,1} r_{j,n,1} / \lambda_{i,1} \lambda_{j,1}; \\ J_{i,n+1,2} &= J_{i,n,2} - \tau_{2,n+1} B_{i,n,2}; & B_{i,n,2} &= \sum_i b_{ij,n,2} r_{j,n,2} / \lambda_{i,2} \lambda_{j,2}; \\ h_{i,n+1,1} &= h_{i,n,1} - \mu_{1,n+1} C_{i,n,1}; & h_{i,n+1,2} &= h_{i,n,2} - \mu_{2,n+1} C_{i,n,2}; \\ C_{i,n,2} &= \sum_i c_{ij,n,2} r_{j,n,2} / \lambda_{i,2} \lambda_{j,2}; & C_{i,n,1} &= \sum_i b_{ij,n,1} r_{j,n,1} / \lambda_{i,1} \lambda_{j,1}; \\ \lambda_{i,1} &= \sum_j |a_{i,j,1}|; & \lambda_{j,1} &= \sum_i |a_{i,j,1}|; & \lambda_{i,1} &= \sum_j |b_{i,j,1}|; \\ \lambda_{i,1,1} &= \sum_i |b_{i,j,1}|; & \lambda_{i,2} &= \sum_j |b_{i,j,2}|; & \lambda_{j,2} &= \sum_i |b_{i,j,2}|; \\ \lambda_{i,2} &= \sum_j |c_{i,j,2}|; & \lambda_{j,2} &= \sum_i |c_{i,j,2}|;\end{aligned}$$

б) элементы матриц решения прямых задач гравиметрии  $a_{ij,n,1}$ ,  $b_{ij,n,1} = (a_{ij,n,1})'_Z$ ,  $c_{ij,n,1} = (b_{ij,n,1})'_Z$  и магнитометрии  $b_{ij,n,2} = (a_{ij,n,2})'_Z$ ,  $c_{ij,n,2} = (b_{ij,n,2})'_Z$ , вычисляемые на каждой  $n$ -й итерации, и формулы связи для них на соседних итерациях:

$$\begin{aligned}a_{ij,n+1,1} &= a_{ij,n,1} + \mu_{1,n+1} b_{ij,n,1} C_{i,n,1}; \\ b_{ij,n+1,2} &= b_{ij,n,2} + \mu_{2,n+1} c_{ij,n,2} C_{i,n,2};\end{aligned}$$

в) невязки  $r_{j,n,1}$  и  $r_{j,n+1,1}$  гравитационного поля  $g_{j,1}$  ( $j = 1, N$ ) (измеренного в  $N$  точках), вычисляемые на смежных итерациях по формулам:

$$r_{j,n,1} = \sum_i a_{i,j,1} \sigma_{i,n,1} - g_{j,1};$$

$$r_{j,n+1,1} = r_{j,n,1} + \mu_{1,n+1} \beta_{j,1} - \tau_{1,n+1} \gamma_{j,1} - \mu_{1,n+1} \tau_{1,n+1} \beta_{j,1};$$

$$\beta_{j,1} = \sum_i b_{i,j,1} C_{i,n,1} \sigma_{i,n,1}; \quad \beta_{j,1} = \sum_i b_{i,j,1} C_{i,n,1} B_{i,n,1};$$

$$\gamma_{j,1} = \sum_i a_{i,j,1} B_{i,n,1},$$

и невязки  $r_{j,n,2}$  и  $r_{j,n+1,2}$  магнитного поля  $Z_{aj,2}$  ( $j = 1, N$ ) (измеренного в  $N$  точках), вычисляемые на смежных итерациях по формулам:

$$r_{j,n,2} = \sum_i b_{i,j,2} J_{i,n,2} - Z_{aj,2};$$

$$r_{j,n+1,2} = r_{j,n,2} + \mu_{2,n+1} \beta_{j,2} - \tau_{2,n+1} \gamma_{j,2} - \mu_{2,n+1} \tau_{2,n+1} \beta_{j,2};$$

$$\beta_{j,2} = \sum_i c_{i,j,2} C_{i,n,2} J_{i,n,2}; \quad \beta_{1j,2} = \sum_i c_{i,j,2} C_{i,n,2} B_{i,n,2};$$

$$\gamma_{j,2} = \sum_i c_{i,j,2} B_{i,n,2};$$

г) частные критерии оптимизации (ЧКО) на  $n + 1$ -й итерации:

$$F_{B,1} = \sum_i B_{i,n+1,1}^2; \quad F_{B,2} = \sum_i B_{i,n+1,2}^2;$$

$$F_h = \sum_i (h_{i,n,1} - h_{i,n,2} - \mu_{1,n+1} C_{i,n,1} + \mu_{2,n+1} C_{i,n,2})^2.$$

С учетом подстановок и преобразований ЧКО с индексами 1 (для гравитационного поля) и 2 (для магнитного поля) абсолютно одинаковы. Поэтому распишем ЧКО и их частные производные без индексов принадлежности к полю:

$$F_B = \sum_i B_{i,n+1}^2 =$$

$$= \sum_i (B_{i,n} + \mu_{n+1} D_{1,i,n} - \tau_{n+1} D_{2,i,n} - \mu_{n+1} \times \tau_{n+1} D_{3,i,n} + \mu_{n+1}^2 D_{4,i,n})^2,$$

где

$$D_{1,i,n} = \sum_j (a_{i,j,n} \beta_{j,n} + b_{i,j,n} C_{i,n} r_{j,n}) / (\lambda_i \lambda_j);$$

$$D_{2,i,n} = \sum_j \gamma_{j,n} a_{i,j,n} / (\lambda_i \lambda_j);$$

$$D_{3,i,n} = \sum_j (a_{i,j,n} \beta_{1,j,n} + b_{i,j,n} C_{i,n} \gamma_{j,n}) / (\lambda_i \lambda_j);$$

$$D_{4,i,n} = \sum_j (\beta_{j,n} b_{i,j,n} C_{i,n}) / (\lambda_i \lambda_j).$$

Введем обозначения:

$$B_{11} = (D_{1,i,n}, D_{1,i,n}); \quad B_{12} = (D_{1,i,n}, D_{2,i,n}); \quad B_{1234} = B_{12} + B_{34};$$

$$B_{44} = (B_{i,n}, B_{i,n}); \quad B_{22} = (D_{2,i,n}, D_{2,i,n}); \quad B_{14} = (D_{1,i,n}, B_{i,n});$$

$$B_{111} = B_{11} + 2B_{64}; \quad (x, y = 1, 2).$$

$$B_{24} = (D_{2,i}, B_{i,n}); \quad B_{34} = (D_{3,i,n}, B_{i,n});$$

$$B_{64} = (D_{4,i,n}, B_{i,n}); \quad H_{12} = \sum_i (h_{i,n,1} - h_{i,n,2})^2;$$

$$H_{cx} = \sum_i (h_{i,n,1} - h_{i,n,2}) C_{i,n,x}; \quad H_{cxy} = \sum_i C_{i,n,x} C_{i,n,y}.$$

Запишем ЧКО и частные производные от них, ограничившись линейными членами:

$$(F_B)'_{\tau_{n+1}} = B_{24} + \mu_{n+1} B_{1234} - \tau_{n+1} B_{22};$$

$$(F_B)'_{\mu_{n+1}} = B_{14} + \mu_{n+1} B_{111} - \tau_{n+1} B_{1234};$$

$$F_B = B_{44} + 2\mu_{n+1} B_{14} - 2\tau_{n+1} B_{24}; \quad (1)$$

$$F_h = H_{12} - 2\mu_{1,n+1} H_{c1} + 2\mu_{2,n+1} H_{c2};$$

$$(F_h)'_{\mu_{1,n+1}} = -H_{c1} + \mu_{1,n+1} H_{c11} - \mu_{2,n+1} H_{c12};$$

$$(F_h)'_{\mu_{2,n+1}} = H_{c2} - \mu_{1,n+1} H_{c12} - \mu_{2,n+1} H_{c22}.$$

Учитывая, что  $B_{11,1} = (D_{1,i,n,1}, D_{1,i,n,1}); B_{12,2} = (D_{1,i,n,2}, D_{2,i,n,2})$  и т. д., из ЧКО составим общий КО для ООЛНЗГМ:

$$\Phi_{B,h} = F_{B,1} F_h F_{B,2} = \min. \quad (2)$$

Продифференцировав (2) по ИК, получим систему 4 уравнений для определения ИК:

$$(\Phi_{B,h})'_{\mu_{1,n+1}} = (F_{B,1})'_{\mu_{1,n+1}} F_n + F_{B,1} (F_h)'_{\mu_{1,n+1}} = 0; \quad (3)$$

$$(\Phi_{B,h})'_{\mu_{2,n+1}} = (F_{B,1})'_{\mu_{2,n+1}} F_n + F_{B,1} (F_h)'_{\mu_{2,n+1}} = 0; \quad (4)$$

$$(\Phi_{B,h})'_{\tau_{1,n+1}} = (F_{B,1})'_{\tau_{1,n+1}} = 0; \quad (5)$$

$$(\Phi_{B,h})'_{\tau_{2,n+1}} = (F_{B,1})'_{\tau_{2,n+1}} = 0. \quad (6)$$

Подставив (1) в (3)–(6), а затем (5), (6) в (3), (4) с учетом индексов 1 и 2 и сгруппировав коэффициенты при неизвестных ИК, получим систему 2 уравнений:

$$\mu_{1,n+1} A_{001} + \mu_{2,n+1} A_{002} = -A_{000}; \quad (7)$$

$$\mu_{1,n+1} B_{001} + \mu_{2,n+1} B_{002} = -B_{000}, \quad (8)$$

где

$$A_{000} = A_{00} + A_{01} B_{24,1} / B_{22,1}; \quad B_{000} = B_{00} - B_{02} B_{24,2} / B_{22,2};$$

$$A_{001} = A_{03} + A_{01} B_{1234,1} / B_{22,1}; \quad B_{002} = B_{04} - B_{02} B_{1234,2} / B_{22,2};$$

$$A_{002} = A_{04}; \quad B_{001} = -B_{03}; \quad A_{00} = -B_{44,1} H_{c1} + H_{12} B_{14,1};$$

$$B_{00} = B_{44,2} H_{c2} + H_{12} B_{14,2}; \quad A_{01} = 2B_{24,1} H_{c1} - H_{12} B_{1234,1};$$

$$B_{02} = 2B_{24,2} H_{c2} + H_{12} B_{1234,2}; \quad (9)$$

$$A_{03} = H_{12} B_{111,1} - 4H_{c1} B_{14,1} + B_{44,1} H_{c11};$$

$$B_{04} = H_{12} B_{111,2} + 4H_{c2} B_{14,2} + B_{44,2} H_{c22};$$

$$B_{03} = B_{44,2} H_{c12} + 2B_{14,2} H_{c1}; \quad A_{04} = -B_{44,1} H_{c12} + 2H_{c2} B_{14,1};$$

$$A_{02} = B_{01} = 0.$$

Решив систему (7)–(8) с учетом (9), вычислим все ИК для итерационных формул:

$$T_{cc} = A_{001} B_{002} - B_{001} A_{002}; \quad T_{c1} = A_{000} B_{002} - B_{000} A_{002};$$

$$T_{c2} = A_{001} B_{000} - B_{001} A_{000}; \quad \mu_{1,n+1} = -T_{c1} / T_{cc}; \quad \mu_{2,n+1} = -T_{c2} / T_{cc};$$

$$\tau_{1,n+1} = (B_{24,1} + \mu_{1,n+1} B_{1234,1}) / B_{22,1};$$

$$\tau_{2,n+1} = (B_{24,2} + \mu_{2,n+1} B_{1234,2}) / B_{22,2}.$$

Приведенные методы являются линеаризованными, но для своей сходимости к реальному устойчивому решению требуют получения в качестве начальных условий предварительного решения обратных задач отдельно по гравиметрии и магнитометрии, например, устойчивым методом простой итерации по критериям  $F_{B,1} = \min$  и  $F_{B,2} = \min$ . При участии автора разработано несколько эффективных методов решения ОЗ, которые на одной итерации дают серию решений для установления различных свойств геологической среды. Приведем в компактном виде три таких метода, которые используются отдельно для решения ОЛНЗГ или ОЛНЗМ. Составим общие КО для каждого метода:

$$\Phi_1 = F_r / F_\sigma = \min; \quad (10)$$

$$\Phi_2 = F_r F_\sigma = \min; \quad (11)$$

$$\Phi_3 = F_r = \min, \quad (12)$$

где

$$F_\sigma = \sum_i (\sigma_{i,n} - \tau_{n+1} B_{i,n})^2; \quad F_r = \sum_j (r_{j,n+1} / \lambda_{j,n})^2. \quad (13)$$

Продифференцировав (10)–(12) по  $\mu_{i,n+1}$  и  $\tau_{r,n+1}$  ( $\Phi$ ;  $t = 1, 2, 3$ ), получим три системы по два уравнения ( $k = 1, 2$ ) для определения всех ИК из (10)–(12):

$$U_{k,1}(-\mu_{i,n+1}) + U_{k,2}\tau_{r,n+1} = U_{k,0}, \quad (14)$$

где

$$U_{k,0} = d_{14}S_0 - \lambda_t d_{44}S_1; \quad (15)$$

$$U_{k,1} = d_{12}S_0 - 2\lambda_t d_{24}S_1; \quad (16)$$

$$U_{k,2} = d_{11}S_0 + 2d_{14}S_1 - \lambda_t(2d_{12}S_1 + B_{44}d_{44}); \quad (17)$$

$$S_0 = (\sigma_{i,n}, \sigma_{i,n}); \quad S_1 = (\sigma_{i,n}, B_{i,n});$$

$$U_{2,0} = d_{24}; \quad U_{2,1} = d_{22}; \quad U_{2,2} = d_{1234};$$

$$d_{24} = (r_{j,n}, \gamma_{j,n} / \lambda_{j,n}^2); \quad d_{12} = (\beta_{j,n}, \gamma_{j,n} / \lambda_{j,n}^2);$$

$$d_{34} = (r_{j,n}, \beta_{j,n} / \lambda_{j,n}^2); \quad d_{1234} = d_{12} + d_{34};$$

$$d_{22} = (\gamma_{j,n}, \gamma_{j,n} / \lambda_{j,n}^2); \quad d_{44} = (r_{j,n}, r_{j,n} / \lambda_{j,n}^2);$$

$$d_{11} = (\beta_{j,n}, \beta_{j,n} / \lambda_{j,n}^2); \quad d_{14} = (r_{j,n}, \beta_{j,n} / \lambda_{j,n}^2).$$

В уравнениях (14)–(17)  $\lambda_1 = 1$  для критерия (10);  $\lambda_2 = -1$  для критерия (11);  $\lambda_1 = 0$  для критерия (12).

Приведенные устойчивые фильтрационные методы используются для получения более точного, устойчивого к помехам и геологически содержательного решения. Это решение восстанавливает одновременно магнитные и плотностные свойства среды, исследуемой нелинейной обратной задачей, в которой учитываются одним критерием оптимизации общие детальные свойства гравитационного и магнитного полей.

1. *Миненко П.А.* Совместная интерпретация гравитационного и магнитного полей методом поиска общих глубинных точек // *Наук. вісн. НГУ.* – 2010. – № 2. – С. 48–52.
2. *Миненко Р.В.* Итерационные методы совместного решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии // *Там само.* – 2010. – № 3. – С. 64–67.
3. *Продайвода Г.Т., Гришук П.І.* Гравімагнітний метод геокартування структурно-речовинних комплексів Українського щита // *Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка.* – 2007. – Вип. 41. – С. 7–10.
4. *Миненко П.А.* Обратная задача гравиметрии в классе интерпретационных моделей // *Наук. вісн. НГУ.* – 2008. – № 8. – С. 73–76.

Поступила в редакцию 31.08.2010 г.

*Р.В. Миненко*

## ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ С ОБЩИМ КРИТЕРИЕМ ОПТИМИЗАЦИИ

Разработан итерационный метод решения линейно-нелинейной обратной задачи гравиметрии и магнитометрии на основе совместного применения в одном критерии и в одной итерации двух полей для случаев несовпадения границ плотностных и магнитных аномальных объектов.

**Ключевые слова:** обратная задача, гравиметрия, магнитометрия, итерация, критерий оптимизации, интерпретационная модель.

*Р.В. Міненко*

## ЕКСТРЕМАЛЬНА ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ГРАВИТАЦІЙНОГО І МАГНІТНОГО ПОЛІВ ІЗ ЗАГАЛЬНИМ КРИТЕРІЄМ ОПТИМІЗАЦІЇ

Розроблено ітераційний метод розв'язку лінійно-нелінійної оберненої задачі гравіметрії та магнітометрії на основі сумісного використання в одному критерії та в одній ітерації обох полів для випадків незбігу меж густинних і магнітних аномальних об'єктів.

**Ключові слова:** обернена задача, гравіметрія, магнітометрія, ітерація, критерій оптимізації, інтерпретаційна модель.