

© Е.П. Вдовина, 2010

*Ивано-Франковский национальный технический университет нефти и газа, г. Ивано-Франковск*

## **СПРАВЕДЛИВОСТЬ ЗАКОНОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ ДЛЯ ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ КАК ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОСНОВА ГРАВИТАЦИОННОЙ ТОМОГРАФИИ**

Характеристики статических геопотенциальных полей (гравитационного, электрического, магнитного) в неоднородных средах подчиняются законам геометрической оптики. Для статических полей сформулирован принцип Ферма и записано уравнение эйконала. Это дает возможность применения известного математического аппарата томографического восстановления физических свойств сред для решения прямых и обратных задач геопотенциальных полей.

**Ключевые слова:** геопотенциальное поле, геометрическая оптика, принцип Ферма, уравнение эйконала.

Усложнение моделей геологических сред и требования, предъявляемые к повышению разрешающей способности геофизических методов, приводят к необходимости совершенствования интерпретационного аппарата. В настоящее время в теории интерпретации данных геопотенциальных полей стремительно развивается новое направление, которое получило пока еще не общепринятое название “гравитационная томография” [1–4]. Исчерпывающий анализ работ в этом направлении приведен в работе [5]. Отмечается информативность и геологическая содержательность результатов решения интерпретационных задач по двум крупным направлениям (фильтрационный и аппроксимационный подходы) при отсутствии теоретической базы метода. В более широком смысле термин “гравитационная томография” обозначает получение тем или иным способом распределений искомого параметра – плотностной характеристики изучаемой модели среды. В статье предлагается теоретическое обоснование применения математического аппарата томографических принципов решения задач просвечивания в виде доказательства справедливости законов волновых процессов в рамках геометрической оптики для описания статических геопотенциальных полей в неоднородных средах.

Задача определения законов, описывающих поведение поля одного источника в неоднородных средах, была поставлена, исходя из следующих общих посылок. Статическое поле в пространстве обладает энергией [6], пропорциональной квадрату напряженности поля. Энергия в каждой точке, где существует поле, возобновляется для статических полей непрерывно, то есть существует стационарный энергетический поток, или, в терминах работы [7], можно принять модель излучения массой гравитационной энергии как рабочую гипотезу. Пропорциональность модуля вектора напряженности поля квадрату расстояния от точки наблюдения до источника позволяет провести аналогии между стационарными полями и волновыми процессами, при этом модуль вектора напряженности поля эквивалентен понятию плотности энергии для волновых процессов, а напряженность поля как вектор аналогична мгновенному значению вектора плотности потока энергии (вектору Умова-Пойнтинга) [8]. Учет влияния неоднородности материальной среды, окружающей источник, таким образом, приведет к получению уравнений, формально аналогичных как законам электростатики в сплошных средах, так и законам геометрической оптики, описывающим волновые процессы в первом приближении. Неоднородные среды предлагается описывать с помощью функции характеристики среды  $C(x, y, z)$ .

Рассмотрим гравитационное поле, создаваемое массой элементарного объема среды  $dm = \sigma_{\text{ист}} dV$ . Источник в точке  $S$  находится в среде с плотностью  $\sigma(x, y, z)$  и создает в среде гравитационное поле. Среда обладает запасом потенциальной энергии, величина которой зависит от характеристики среды  $C(x, y, z)$ :

$$C(x, y, z) = \gamma(\sigma_{\text{ист}} - \sigma(x, y, z))dV . \quad (1)$$

Эта энергия проявляется как способность среды уменьшать (ослаблять) поле источника. Для однородных сред с различными плотностями коэффициенты ослабления поля одного и того же источника различны. Поэтому представляется логичным предположить, что в неоднородной среде с  $\sigma(x, y, z) \neq \text{const}$  происходит неравномерное уменьшение энергии поля источника. Объемная плотность энергии поля [6] пропорциональна квадрату напряженности поля в среде  $\vec{E}_{\text{ср}}(x, y, z)$ , поэтому следует допустить, что в общем случае линии напряженности поля могут рассматриваться как энергетические линии, т. е. как условные линии в пространстве, вдоль которых распространяется поток энергии. Для неоднород-

ных сред энергетические линии будут в общем случае криволинейны вследствие дифференциации среды по плотностной характеристике. При этом в любой точке изменение величины и направления потока гравитационной энергии определяется изменением вектора  $\vec{E}_{\text{cp}}$ , которое может быть описано дифференциальными характеристиками, и, со всей очевидностью, зависит от поведения функции  $\sigma_{\text{cp}}(x, y, z)$  в окрестности данной точки.

Если источник – масса  $dm = \sigma_{\text{ист}} dV$  – создает в неоднородной окружающей среде с характеристикой  $C(x, y, z)$  поле, то это означает, что можно наблюдать напряженность поля источника  $\vec{E}_{\text{cp}}$  как векторную однозначную функцию координат. Пусть функция  $C(x, y, z)$  непрерывна вместе со своими производными до второго порядка. Тогда всегда можно определить вектор  $\vec{r}^*$ , имеющий физический смысл расстояния, такой, чтобы выполнялось равенство:

$$U_{\text{cp}}(x, y, z) = \frac{C(x, y, z)}{|\vec{r}^*|}.$$

При этом в любой точке, где однозначно определен вектор  $\vec{E}_{\text{cp}}$  и выполняется условие непрерывности функции  $C$  и ее производных, вектор  $\vec{r}^*$  будет определен единственным образом.

Для определения характера изменения  $U_{\text{cp}}$  в неоднородной среде достаточно получить уравнения, связывающие дифференциальные характеристики  $U_{\text{cp}}$  с функцией  $C$  и ее производными. Поэтому нет необходимости определять сам вектор  $\vec{r}^*$ , введение которого в рассмотрение является скорее иллюстративным приемом, аналогичным, например, построению фиктивных зарядов в электростатике диэлектриков [9]. Существенным, однако, является тот факт, что для каждой точки среды, где определена напряженность поля данного источника, этот вектор задается единственным образом. Поэтому для определения функции потенциала поля источника в неоднородной среде возможно преобразовать последнюю формулу как

$$\Delta \left( \frac{U_{\text{cp}}(x, y, z)}{C(x, y, z)} \right) = 0. \quad (2)$$

Если принять как основу гипотезу, трактующую стационарное гравитационное поле как непрерывный и непрерывно возобновляемый во времени поток энергии, то ослабление напряженности поля – суть потери гравитационной энергии в процессе ее непрерывного возобновления в каждой точке среды. Чем больше плотность окружающей источник среды, тем меньше величина напряженности поля, и, соответственно, меньше объемная плотность энергии поля. Можно сформулировать этот тезис по-другому: материальная среда с  $\sigma_{\text{cp}} > 0$  обладает способностью ослаблять поле, или, иными словами, обладает неким запасом энергии. Поскольку ранее в такой постановке задача определения гравитационного поля в сплошной среде не ставилась, то не возникло необходимости введения каких-либо характеристик, которые позволили бы описать запас энергии, которым обладает материальная среда.

С этой целью предлагается ввести в рассмотрение новую скалярную функцию  $W_{\text{cp}}(x, y, z)$ , которую условно можно назвать потенциалом среды или величиной, обратной потенциалу поля. В вакууме

$$W_{\text{в}}(x, y, z) = \frac{r}{\gamma\sigma_{\text{ист}}dV} = \frac{1}{U_{\text{в}}(x, y, z)}.$$

В однородной среде

$$W_{\text{cp}}(x, y, z) = \frac{r}{\gamma(\sigma_{\text{ист}} - \sigma_{\text{cp}}(x, y, z))dV} = \frac{1}{U_{\text{cp}}(x, y, z)}.$$

В неоднородной среде с учетом обозначения (1)

$$W_{\text{cp}}(x, y, z) = \frac{|\vec{r}^*|}{C(x, y, z)}.$$

С учетом примененного для потенциала поля приема допустима следующая запись последней формулы :

$$W_{\text{cp}}(x, y, z)C(x, y, z) = |\vec{r}^*|,$$

или (в ином виде)

$$|\text{grad}(W_{\text{cp}}(x, y, z)C(x, y, z))| = 1. \quad (3)$$

Для однородных и кусочно-однородных сред возможно допущение  $\text{grad } C(x, y, z) \approx 0$  и уравнение (3) может быть представлено в виде, по своей структуре полностью аналогичном уравнению эйконала в геометрической оптике:

$$|\text{grad } W_{\text{cp}}|^2 = \frac{1}{C^2}. \quad (4)$$

В подробной записи последнее выражение для кусочно-однородных сред

$$\left(W'_{\text{cp } x}\right)^2 + \left(W'_{\text{cp } y}\right)^2 + \left(W'_{\text{cp } z}\right)^2 = \frac{1}{C^2}$$

легко позволяет получить условия искривления линий напряженности (или, что то же самое, условия сопряжения векторов напряженности поля) на поверхности раздела двух однородных сред.

Следует отметить, что формулы (2)–(4) справедливы также как для электростатического поля в неоднородной среде, состоящей из диэлектриков с включением произвольной системы зарядов, так и для магнитного поля в среде, неоднородной по своим магнитным свойствам.

Для электростатического поля одного источника элементарного объема с плотностью заряда  $\delta_{\text{ист}}^{\text{эл}}$  в среде, которая характеризуется диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(x, y, z)$  и содержит неподвижные электрические заряды с плотностью  $\delta^{\text{эл}}(x, y, z)$ , характеристика среды определяется формулой:

$$C^{\text{эл}}(x, y, z) = \frac{(\delta_{\text{ист}}^{\text{эл}} - \delta^{\text{эл}}(x, y, z))dV}{\varepsilon(x, y, z)}.$$

Для магнитного поля, создаваемого магнитной массой элементарного объема плотностью  $\delta_{\text{ист}}^{\text{м}}$ , в присутствии среды, характеризующейся магнитной проницаемостью  $\mu(x, y, z)$  и включающей неподвижные магнитные массы, распределенные в пространстве с плотностью  $\delta^{\text{м}}(x, y, z)$

$$C^{\text{м}}(x, y, z) = \frac{(\delta_{\text{ист}}^{\text{м}} - \delta^{\text{м}}(x, y, z))dV}{\mu(x, y, z)}.$$

Таким образом, базируясь на представлении о статическом поле одного источника в неоднородной среде как о потоке непрерывно возоб-

новляемой энергии (гравитационной, электрической, магнитной), можно сформулировать принцип Ферма применительно к стационарному векторному полю: поток энергии статического векторного поля осуществляется вдоль линии напряженности поля  $l$ , и потери энергии при этом минимальны:

$$W_{cp}(x, y, z) = \int_l \frac{dl}{C(x, y, z)} \rightarrow \min. \quad (5)$$

**Выводы.** Для описания степени ослабления поля сплошной средой впервые предложено такое понятие как потенциал среды. Дополнение обычных характеристик поля (напряженность, потенциал) функцией потенциала среды дало возможность доказать правомерность гипотезы представления статических полей как волновых процессов в первом приближении. Впервые для статических векторных полей сформулирован принцип Ферма, согласно которому энергия распространяется в неоднородной среде вдоль линий напряженности поля, и потери этой энергии при этом минимальны. Иным выражением принципа наименьшего действия является уравнение, по своей структуре аналогичное уравнению эйконала в геометрической оптике, которое получено для потенциала среды и впервые записано применительно к статическим полям. По мнению автора, введение в рассмотрение функции потенциала среды является оправданным и целесообразным, поскольку, помимо теоретических аналогий между статическими полями и волновыми процессами, именно привлечение понятия потенциал среды позволило применить известные приемы томографического восстановления характеристик среды в задачах просвечивания для решения прямой и обратной задач гравиметрии.

1. *Вижва С.А., Продайвода Г.Т., Гришук П.І.* Гравімагнітна томографія: становлення і перспективи розвитку // Матеріали ІХ Міжнародної наукової конференції “Моніторинг геологічних процесів”. 14–17 жовтня. – Київ, 2009. – С. 105–107.
2. *Петрищевский А.М.* Гравитационная томография тектоносферы Дальнего Востока России в классе сферических источников // Геофизика. – 2005. – № 5. – С. 47–57.
3. *Алексеев С.Г., Ворошилов Н.А., Маргович Е.Г. и др.* Проявления разноранговых углеводородных и рудных систем в гравитационном и магнитном полях // Материалы 37-й сессии Международного научного семинара имени Д.Г. Успенского “Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей”. – Москва, 2010. – С. 15–20.
4. *Алексеев С.Г., Козлов С.А., Штокаленко М.Б.* Проявления разноранговых углеводородных и рудных систем в гравитационном и магнитном полях // Материалы 37-й

- сессии Международного научного семинара имени Д.Г. Успенского “Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей”. – Москва, 2010. – С. 20–25.
5. Долгаль А.С., Шархимуллин А.Ф. “Гравитационная томография” – практика, опережающая теорию? // Геоинформатика. – 2009. – № 3. – С. 59–67.
  6. Овчинников И.К. Теория поля. – М.: Недра, 1979. Изд. 2-е, перераб. – 352 с.
  7. Михайлов И.Н. Гравитация и гравиразведка // Геофизика. – 2005. – № 1. – С. 38–49.
  8. Сейсморазведка. Справочник геофизика: в двух книгах / Под ред. Номоконова В.П. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1990. – 336 с.
  9. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика, т. VIII. / Издание второе, перераб. и дополненное. – М.: Наука, Главная редакция физико-матем. литературы, 1982. – 620 с.

**Справедливість законів геометричної оптики для геопотенціальних полів у неоднорідних середовищах як теоретична основа гравітаційної томографії**  
О.П. Вдовина

**РЕЗЮМЕ.** Характеристики статичних геопотенціальних полів в неоднорідних середовищах підпорядковуються законам геометричної оптики. Для статичних полів сформульований принцип Ферма та записано рівняння ейконала. Це дає можливість застосування відомого математичного апарата томографічного відновлення фізичних властивостей середовищ з метою розв’язку прямих та обернених задач геопотенціальних полів.

**Ключові слова:** геопотенціальне поле, геометрична оптика, принцип Ферма, рівняння ейконала.

**The Validity of the Laws of Geometrical Optics for Geopotential Fields in Heterogeneous Environments as the Theoretical Basis of Gravitational Tomography**  
E.P. Vdovina

**SUMMARY.** The characteristics of the static geopotential fields (gravitational, electric, magnetic) in the heterogeneous environments subject to the laws of the geometrical optics. The principle of Fermat is formulated and recorded the eikonal equation for the static fields. It is permits the well-known mathematical apparatus of the topographic reconstruction of the physical properties of the mediums with the aim to find the solutions for the direct and inverse problems of the geopotential fields.

**Keywords:** geopotential fields, geometrical optics, principle of Fermat, eikonal equation.