

## АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В СЛОИСТО-БЛОКОВОЙ СРЕДЕ С СОСТАВНЫМИ ИЕРАРХИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

О.А. Хачай<sup>1</sup>, А.Ю. Хачай<sup>2</sup>, О.Ю. Хачай<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт геофизики им. Ю.П. Булашевича УрО РАН, ул. Амундсена, 100, 620016, Екатеринбург, Российская Федерация, olgakhachay@yandex.ru*

<sup>2</sup>*Уральский Федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, ул. Мира, 19, 620002, Екатеринбург, Российская Федерация, andrey.khachay@gmail.com, khachay@yandex.ru*

Геологическая среда с многоуровневой иерархической структурой и свойствами прочности требует регулярного изучения устойчивости ее состояния. С этой целью разработан новый метод моделирования акустического мониторинга продольными и поперечными волнами слоисто-блочной среды с несколькими включениями, имеющими различные физико-механические иерархические структуры. Разрабатывается итерационный процесс решения прямой задачи для случая акустического поля, проникающего в три иерархических включения  $l$ -,  $m$ - и  $s$ -го ранга на основе использования двумерных интегрально-дифференциальных уравнений. Степень иерархии включений определяется значениями их рангов, которые могут быть разными. Иерархические включения расположены в разных слоях один над другим: верхний слой аномально пластичный, второй — аномально упругий, третий — аномально плотностной. Степень заполнения включений каждого ранга для всех трех иерархических включений может быть разной. Результаты моделирования могут использоваться для мониторинга исследований устойчивости геологических и механических структур сложного иерархического строения при различных механических воздействиях.

**Ключевые слова:** сложная иерархическая среда, акустическое поле, итерационный алгоритм, интегрально-дифференциальные уравнения и прямая задача.

**Введение.** Идея многомасштабных явлений в твердых телах при их пластической деформации и разрушении была сформулирована в томской школе физики твердого тела как концепция структурных уровней деформации твердых тел [1]. Структурные уровни деформации относятся к классу мезоскопических масштабов. Не всегда осознается, что мезоскопический подход является принципиально новой парадигмой, качественно отличной от методологии механики сплошных сред (макромасштабный подход) и дислокационной теории (микромасштабный подход). Экспериментальные и теоретические исследования мезоскопических структурных уровней деформации привели к качественно новой методологии описания деформируемого тела как многоуровневой самосогласованной системы. Сформированные на разных уровнях шкалы дезориентированные подструктуры представляют собой крупномасштабный инвариант — основу для построения многоуровневой модели деформируемого твердого тела, в которой учитывается вся иерархия масштабов структурных уровней деформации. В ближайшие десятилетия следует рассмотреть наиболее актуальные работы в сфере физической мезомеханики: применение методов физической мезомеханики структурно-неоднородных сред к проблемам современного материаловедения, в том числе наноматериалов, тонких пленок и многослойных структур; поверхностное упрочнение, примене-

ние упрочняющих и защитных покрытий. При построении математической модели реального объекта необходимо использовать в качестве априорной информации активные и пассивные данные мониторинга, полученные в ходе текущей работы объекта. В статьях [2, 3] алгоритмы моделирования построены в электромагнитном случае для трехмерных неоднородностей, в сейсмическом — для двумерных неоднородностей с произвольным типом источника возбуждения  $N$ -слоистой среды, в которой иерархическое упругое включение расположено в  $J$ -м слое. Разработан новый  $2D$  алгоритм моделирования дифракции звука на упругом и пористом влагонасыщенном включении иерархической структуры, расположенном в  $J$ -м слое упругой  $N$ -слоистой среды [4]. Построены алгоритмы моделирования в акустическом случае для двумерной гетерогенности — произвольный тип источника возбуждения среды  $N$ -слоя с отдельной иерархической аномальной плотностью, напряженным и пластическим включением, расположенным в  $J$ -м слое [5].

В данной статье с помощью метода, описанного в публикациях [6—9], представлен алгоритм моделирования акустического поля (продольной акустической волны и поперечной волны) в виде итерационного процесса при решении прямой задачи для трех иерархических включений ( $l$ -,  $m$ -,  $s$ -ряды) с использованием двумерных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Степень

иерархии включений определяется значениями их рангов, которые могут быть разными. Иерархические включения расположены в разных слоях друг над другом: верхний — аномально пластичный (в слое  $j-1$ ), второй — аномально упругий (в слое  $j$ ), третий — аномально плотностной (в слое  $j+1$ ) (рис. 1).

**Алгоритм моделирования дифракции звука на двумерной  $N$ -слоистой-блочной среде с составными иерархическими включениями.** В работах [5, 6] описан алгоритм моделирования дифракции поперечной волны на двумерном упругом иерархическом включении, расположенном в  $J$ -м слое  $N$ -слоистой среды.  $G_{Sp,j}(M, M^0)$  — функция источника сейсмического поля, краевая задача которой сформулирована в публикациях [7, 8]:

$$k_{1ji}^2 = \omega^2 (\sigma_{ji} / \lambda_{ji}), \quad (1)$$

где  $k$  — волновое число в упругой среде для продольной волны, индексы  $ji$  обозначают свойство среды внутри неоднородности;  $ja$  — свойство среды вне неоднородности;  $\lambda$  — постоянная Ламе;  $\sigma$  — плотность среды;  $\omega$  — круговая частота;  $\lambda_{ji} \neq \lambda_{ja}$ ,  $\sigma_{ji} \neq \sigma_{ja}$ ;  $\vec{u} = \text{grad} \varphi$  — вектор смещения;  $\varphi^0$  — потенциал сейсмического поля в слоистой среде при отсутствии неоднородности;  $\varphi_{ji}^0 = \varphi_{ja}^0 \cdot \varphi_l^0$  — потенциал нормального сейсмического поля в слоистой среде при отсутствии неоднородности предыдущего ранга  $l$ , если  $l=2 \dots L$ , то  $\varphi_l^0 = \varphi_{l-1}$ , если  $l=1$ , то  $\varphi_l^0 = \varphi^0$ , что совпадает с соответствующим выражением [5]. Предположим, что, согласно [9]:

$$k_{1jil}^2 = \omega^2 (\sigma_{jil} / (\lambda_{jil} + \lambda'_{jil} \omega_{1jil})), \quad (2)$$

где  $\omega \neq \omega_{1jil}$  и  $\lambda_{jil} \neq \lambda'_{jil}$  для всех рангов  $l$ , определяемых влиянием внутреннего трения во включении по модели Фохта [10]. Тогда акустическое зондирование второго иерархического включения будет происходить либо на двух независимых частотах, либо в определенном интервале частот между  $\omega$  и  $\omega_{1jil}$  с совместным эффектом упругих параметров первого включения:  $\lambda_{1ji}$  и  $\lambda'_{1jil}$ . Эти свойства будут отражены далее в возбуждении второго и третьего иерархических включений и затем при переходе от одного иерархического уровня к другому. Пусть значения ранга для всех иерархических включений равны:  $l=m=s=1$ , тогда система уравнений, описывающая распространение продольной акустической волны в первом включении, можно записать так:

$$\begin{aligned} & \frac{(k_{1(j-1)il}^2 - k_{1(j-1)}^2)}{2\pi} \iint_{S_{Cl}} \varphi_l(M) G_{Sp,(j-1)}(M, M^0) d\tau_M + \\ & + \frac{\sigma_{(j-1)a}}{\sigma_{(j-1)il}} \varphi_{l-1}^0(M^0) - \end{aligned}$$

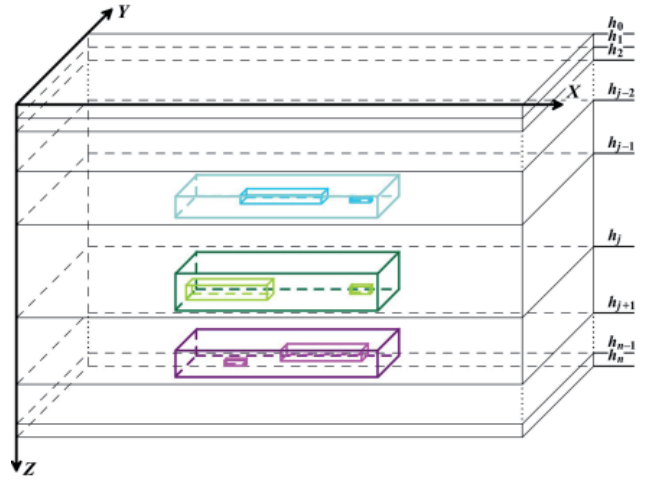


Рис. 1. Схема составных аномально пластических (верхних), аномально упругих (средних) и аномально плотностных (нижних) неоднородностей иерархического типа, расположенных в упругой  $N$ -слоистой среде

Fig. 1. Scheme of compound anomalous plastic (upper), anomalously elastic (medium) and anomalously density (low) heterogeneities of a hierarchical type located in an elastic  $N$ -layer medium

$$\begin{aligned} & - \frac{(\sigma_{(j-1)a} - \sigma_{(j-1)il})}{\sigma_{(j-1)il} 2\pi} \int_{C_{il}} G_{Sp,(j-1)} \frac{\partial \varphi_l}{\partial n} dc = \varphi_l(M^0), \\ & M^0 \in S_{1Cl}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_{(j-1)il} (k_{1(j-1)l}^2 - k_{1(j-1)}^2)}{\sigma(M^0) 2\pi} \iint_{S_{Cl}} \varphi_l(M) G_{Sp,(j-1)}(M, M^0) d\tau_M + \\ & + \varphi_{l-1}^0(M^0) - \frac{(\sigma_{(j-1)a} - \sigma_{(j-1)il})}{\sigma(M^0) 2\pi} \int_{C_{il}} G_{Sp,(j-1)} \frac{\partial \varphi_l}{\partial n} dc = \\ & = \varphi_l(M^0), \quad M^0 \notin S_{1Cl}; \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_{jil} (k_{1jil}^2 - k_{1ji}^2)}{\sigma(M^0) 2\pi} \iint_{S_{Cl}} \varphi_l(M) G_{Sp,j}(M, M^0) d\tau_M + \\ & + \varphi_{l-1}^0(M^0) - \frac{(\sigma_{ja} - \sigma_{jil})}{\sigma(M^0) 2\pi} \int_{C_{il}} G_{Sp,j} \frac{\partial \varphi_l}{\partial n} dc = \varphi_l(M^0), \\ & M^0 \in \Pi_j. \quad (4) \end{aligned}$$

Вычислим  $\varphi_l(M^0)$ ,  $M^0 \in \Pi_j$  в слое, где второе иерархическое упругое включение расположено с использованием выражения (4). Тогда потенциал нормального акустического поля для второго включения записывается в виде  $\varphi_{m-1}^0(M^0) = \varphi_l(M^0)$ ,  $M^0 \in \Pi_j$ , и система уравнений для второго упругого иерархического включения ранга  $m=1$  имеет вид, согласно [5, 6]:

$$\begin{aligned}
& \frac{(k_{1jim}^2 - k_{1j}^2)}{2\pi} \iint_{S_{2C_m}} \varphi_m(M) G_{Sp,j}(M, M^0) d\tau_M + \\
& + \frac{\sigma_{ja}}{\sigma_{jim}} \varphi_{m-1}^0(M^0) - \frac{(\sigma_{ja} - \sigma_{jim})}{\sigma_{jim} 2\pi} \int_{C_{2m}} G_{Sp,j} \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} dc = \\
& = \varphi_m(M^0), \quad M^0 \in S_{2C_m}; \\
& \frac{\sigma_{jim} (k_{1jim}^2 - k_{1j}^2)}{\sigma(M^0) 2\pi} \iint_{S_{2C_m}} \varphi_m(M) G_{Sp,j}(M, M^0) d\tau_M + \\
& + \varphi_{m-1}^0(M^0) - \frac{(\sigma_{ja} - \sigma_{jim})}{\sigma(M^0) 2\pi} \int_{C_{2m}} G_{Sp,j} \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} dc = \varphi_m(M^0), \\
& \quad M^0 \notin S_{2C_m}; \quad (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma_{(j+1)im} (k_{1(j+1)im}^2 - k_{1(j+1)}^2)}{\sigma(M^0) 2\pi} \iint_{S_{2C_m}} \varphi_m(M) G_{Sp,(j+1)} \times \\
& \times (M, M^0) d\tau_M + \varphi_{m-1}^0(M^0) - \frac{(\sigma_{(j+1)a} - \sigma_{(j+1)im})}{\sigma(M^0) 2\pi} \times \\
& \times \int_{C_{2m}} G_{Sp,(j+1)} \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} dc = \varphi_m(M^0), \\
& \quad M^0 \notin S_{2C_m}, \quad \in \Pi_{j+1}. \quad (6)
\end{aligned}$$

Вычислим  $\varphi_m(M^0)$ ,  $M^0 \notin S_{2C_m}$ ,  $\in \Pi_{j+1}$ , в слое, где размещена третья иерархическая аномалия плотности с использованием выражения (6). Тогда нормальный потенциал акустического поля будет иметь вид:  $\varphi_{s-1}^0(M^0) = \varphi_m(M^0)$ ,  $M^0 \in \Pi_{j+1}$ .

$$\begin{aligned}
& \frac{(k_{1(j+1)is}^2 - k_{1(j+1)}^2)}{2\pi} \iint_{S_{3C_s}} \varphi_s(M) G_{Sp,(j+1)}(M, M^0) d\tau_M + \\
& + \frac{\sigma_{(j+1)a}}{\sigma_{(j+1)is}} \varphi_{s-1}^0(M^0) - \frac{(\sigma_{(j+1)a} - \sigma_{(j+1)is})}{\sigma_{(j+1)is} 2\pi} \times \\
& \times \int_{C_{3s}} G_{Sp,(j+1)} \frac{\partial \varphi_s}{\partial n} dc = \varphi_s(M^0), \quad M^0 \in S_{3C_s}; \\
& \frac{\sigma_{(j+1)is} (k_{1(j+1)is}^2 - k_{1(j+1)}^2)}{\sigma(M^0) 2\pi} \times \\
& \times \iint_{S_{3C_s}} \varphi_s(M) G_{Sp,(j+1)}(M, M^0) d\tau_M + \varphi_{s-1}^0(M^0) - \\
& - \frac{(\sigma_{(j+1)a} - \sigma_{(j+1)is})}{\sigma(M^0) 2\pi} \int_{C_{3s}} G_{Sp,(j+1)} \frac{\partial \varphi_s}{\partial n} dc = \varphi_s(M^0), \\
& \quad M^0 \notin S_{3C_s} \in \Pi_{j+1}. \quad (7)
\end{aligned}$$

Упругие параметры третьего иерархического включения для всех рангов  $s$  и вмещающего слоя идентичны, а плотность иерархического включения для всех рангов отличается от плотности вмещающей среды. Тогда система уравнений для третьего иерархического включения ранга  $s=1$  имеет вид, согласно [5], выражений (7):  $G_{Sp,(j+1)}(M, M^0)$  — функция источника сейсмического поля, она совпадает с функцией [7, 8];  $k_{1(j+1)is}^2 = \omega^2 (\sigma_{(j+1)is} / \lambda_{(j+1)is})$ ;  $\lambda_{(j+1)is} = \lambda_{(j+1)a}$ ;  $k$  — волновое число для продольной волны, параметры упругости для всех  $s$ ; индекс  $ji$  — свойство среды внутри неоднородности;  $ja$  — вне неоднородности;  $s=1 \dots S$  — номер иерархического уровня,  $\varphi_{s-1}^0(M^0) = \varphi_m(M^0)$ ,  $M^0 \in \Pi_{j+1}$ , — потенциал нормального акустического поля в слое  $j+1$  при отсутствии третьей неоднородности прежнего ранга. Вычислим  $\varphi_s(M^0)$ ,  $M^0 \notin S_{3C_s} \in \Pi_{j-1}$ , в слое  $j-1$  с помощью выражения

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma_{(j-1)is} (k_{1(j-1)is}^2 - k_{1(j-1)}^2)}{\sigma(M^0) 2\pi} \times \\
& \times \iint_{S_{3C_s}} \varphi_s(M) G_{Sp,(j-1)}(M, M^0) d\tau_M + \varphi_{s-1}^0(M^0) - \\
& - \frac{(\sigma_{(j-1)a} - \sigma_{(j-1)is})}{\sigma(M^0) 2\pi} \int_{C_s} G_{Sp,(j-1)} \frac{\partial \varphi_s}{\partial n} dc = \varphi_s(M^0), \\
& \quad M^0 \notin S_{3C_s} \in \Pi_{j-1}. \quad (8)
\end{aligned}$$

Величины  $L$ ,  $M$  и  $S$  имеют максимальные значения рангов иерархии для трех включений. Здесь  $L=3$ ,  $M=3$ ,  $S=4$ ;  $l=l+1$ ;  $m=m+1$ ;  $s=s+1$ . Если  $l < 3$  или  $l=3$

$$\varphi_{l-1}^0(M^0) = \varphi_{s-1}(M^0), \quad M^0 \in \Pi_{j-1}, \quad (8')$$

обратимся к алгоритму (3) и (8). Если  $l > 3$  и  $m=2$ , то вычисляем в слое  $j$   $\varphi_s(M^0)$ ,  $M^0 \notin S_{3C_s} \in \Pi_j$ , используя следующее выражение:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma_{jis} (k_{1jis}^2 - k_{1j}^2)}{\sigma(M^0) 2\pi} \iint_{S_{3C_s}} \varphi_s(M) G_{Sp,j}(M, M^0) d\tau_M + \\
& + \varphi_{s-1}^0(M^0) - \frac{(\sigma_{ja} - \sigma_{jis})}{\sigma(M^0) 2\pi} \int_{C_s} G_{Sp,(j)} \frac{\partial \varphi_s}{\partial n} dc = \\
& = \varphi_s(M^0), \quad M^0 \notin S_{3C_s} \in \Pi_j. \quad (9)
\end{aligned}$$

Если  $m=3$ ,  $\varphi_{m-1}^0(M^0) = \varphi_{s-1}(M^0)$ ,  $M^0 \in \Pi_j$ , перейдем к алгоритму (5)–(8). Если  $m > 3$  и  $s < 4$  или  $s=4$ ,  $\varphi_{s-1}^0(M^0) = \varphi_{s-1}(M^0)$ ,  $M^0 \in \Pi_{j+1}$ , то переходим к алгоритму (7)–(8). Если  $s > 4$ , запишем

$$\frac{\sigma_{jis} (k_{1jis}^2 - k_{1j}^2)}{\sigma(M^0) 2\pi} \iint_{S_{3Cs}} \varphi_s(M) G_{Sp,j}(M, M^0) d\tau_M + \varphi_{s-1}^0(M^0) - \frac{(\sigma_{ja} - \sigma_{jis})}{\sigma(M^0) 2\pi} \int_{C_s} G_{Sp,j} \frac{\partial \varphi_s}{\partial n} dc = \varphi_s(M^0),$$

$$M^0 \notin S_{3Cs} \in \Pi_j. \quad (10)$$

Вычислим  $\varphi_s(M^0)$ ,  $M^0 \notin S_{3Cs} \in \Pi_j$  во всех слоях  $j=1, \dots, N$ , используя выражение (10). Алгоритм останавливается, если ряды иерархии становятся больше заданных чисел (8'). Если на некотором иерархическом уровне структура локальной неоднородности распадается на несколько неоднородностей, то двойные и контурные интегралы в выражениях (3)–(10) берутся по всем неоднородностям данного ранга.

**Алгоритм моделирования дифракции поперечной волны на двумерной  $N$ -слоистой-блочной среде с составными иерархическими включениями.** В работах [5, 6] описан алгоритм моделирования дифракции поперечной волны на двумерном упругом иерархическом включении, расположенном в  $J$ -слое  $N$ -слоистой среды.  $G_{Ss,j}(M, M^0)$  — функция источника сейсмического поля, краевая задача которой сформулирована в работах [7, 8]:

$$k_{2jil}^2 = \omega^2 (\sigma_{jil} / \mu_{jil}). \quad (11)$$

Это волновое число в упругой среде для продольной волны;  $\mu_{jil} = \mu_{jil} + \mu'_{jil} \omega_{2jil}$ ;  $ji$  — свойство среды внутри неоднородности;  $ja$  — свойство среды вне неоднородности;  $\mu$  — постоянная Ламе;  $\sigma$  — плотность среды;  $\omega$  — круговая частота,  $\mu_{ji} \neq \mu_{ja}$ ,  $\sigma_{ji} \neq \sigma_{ja}$ ,  $\vec{u} = \text{grad} \varphi$  — вектор смещения;  $u_{xl}$  — составляющая сейсмического поля в слоистой среде при отсутствии неоднородности:  $u_{xji}^0 = u_{xja}^0$ ,  $u_{xl}^0$  — составляющая нормального сейсмического поля в слоистой среде при отсутствии неоднородности предыдущего ранга  $l$ ; если  $l=2 \dots L$ , то  $u_{xl}^0 = u_{x(l-1)}^0$ , если  $l=1$ , то  $u_{xl}^0 = u_x^0$ , что совпадает с соответствующим выражением [5].

Предположим [9], что

$$k_{2jil}^2 = \omega^2 (\sigma_{jil} / (\mu_{jil} + \mu'_{jil} \omega_{2jil})), \quad (12)$$

где  $\omega \neq \omega_{2jil}$  и  $\mu_{jil} \neq \mu'_{jil}$  для всех рангов  $l$ , определяемых влиянием внутреннего трения при включении по модели Фохта [10]. Тогда акустическое зондирование второго иерархического включения будет происходить либо на двух независимых частотах, либо в определенном интервале частот между  $\omega$  и  $\omega_{2jil}$  с совместным эффектом упругих параметров первого включения:  $\mu_{1ji}$  и  $\mu'_{1jil}$ . Эти свойства будут отражены далее в возбуждении второго и третьего

иерархических включений и затем при переходе от одного иерархического уровня к другому. Пусть значения ранга для всех иерархических включений равны:  $l=m=s=1$ , тогда систему уравнений, описывающую распространение поперечной акустической волны в первом включении, запишем в виде

$$\frac{(k_{2(j-1)il}^2 - k_{2(j-1)}^2)}{2\pi} \times \iint_{S_{1Cl}} u_{xl}(M) G_{Ss,(j-1)}(M, M^0) d\tau_M + \frac{\mu_{(j-1)a}}{\mu_{(j-1)il}} u_{x(l-1)}^0(M^0) + \frac{(\mu_{(j-1)a} - \mu_{(j-1)il})}{\mu_{(j-1)il} 2\pi} \int_{C_{1l}} u_{xl}(M) \frac{\partial G_{Ss,(j-1)}}{\partial n} dc = u_{xl}(M^0),$$

$$M^0 \in S_{1Cl};$$

$$\frac{\mu_{(j-1)il} (k_{2(j-1)il}^2 - k_{2(j-1)}^2)}{\mu(M^0) 2\pi} \times \iint_{S_{1Cl}} u_{xl}(M) G_{Ss,(j-1)}(M, M^0) d\tau_M + u_{x(l-1)}^0(M^0) + \frac{(\mu_{(j-1)a} - \mu_{(j-1)il})}{\mu(M^0) 2\pi} \int_{C_{1l}} u_{xl}(M) \frac{\partial G_{Ss,(j-1)}}{\partial n} dc = u_{xl}(M^0),$$

$$M^0 \notin S_{1Cl}; \quad (13)$$

$$\frac{\mu_{jil} (k_{2jil}^2 - k_{2j}^2)}{\mu(M^0) 2\pi} \iint_{S_{1Cl}} u_{xl}(M) G_{Ss,j}(M, M^0) d\tau_M + u_{x(l-1)}^0(M^0) + \frac{(\mu_{ja} - \mu_{jil})}{\mu(M^0) 2\pi} \int_{C_{1l}} u_{xl}(M) \frac{\partial G_{Ss,j}}{\partial n} dc = u_{xl}(M^0), \quad M^0 \in \Pi_j. \quad (14)$$

Вычислим  $u_{xl}(M^0)$ ,  $M^0 \in \Pi_j$ , в слое, где расположено второе иерархическое упругое включение, используя выражение (14). Составляющую нормального акустического поля для второго включения запишем в виде  $u_{x(m-1)}^0(M^0) = u_{xl}(M^0)$ ,  $M^0 \in \Pi_j$ . Система уравнений для второго упругого иерархического включения ранга  $m=1$  имеет такой вид, согласно [5, 6]:

$$\frac{(k_{2jim}^2 - k_{2j}^2)}{2\pi} \iint_{S_{2Cm}} u_{xm}(M) G_{Ss,j}(M, M^0) d\tau_M + \frac{\mu_{ja}}{\mu_{jim}} u_{x(m-1)}^0(M^0) + \frac{(\mu_{ja} - \mu_{jim})}{\mu_{jim} 2\pi} \int_{C_{2m}} u_{xm} \frac{\partial G_{Ss,j}}{\partial n} dc = u_{xm}(M^0), \quad M^0 \in S_{2Cm};$$

$$\frac{\mu_{jim}(k_{2jim}^2 - k_{2j}^2)}{\mu(M^0)2\pi} \iint_{S_{2Cm}} u_{xm}(M) G_{Ss,j}(M, M^0) d\tau_M +$$

$$+ u_{x(m-1)}^0(M^0) + \frac{(\mu_{ja} - \mu_{jim})}{\mu(M^0)2\pi} \int_{C_{2m}} u_{xm} \frac{\partial G_{Ss,j}}{\partial n} dc =$$

$$u_{xm}(M^0), M^0 \notin S_{2Cm}; \quad (15)$$

$$\frac{\mu_{(j+1)im}(k_{2(j+1)im}^2 - k_{2(j+1)}^2)}{\mu(M^0)2\pi} \times$$

$$\iint_{S_{2Cm}} u_{xm}(M) G_{Ss,(j+1)}(M, M^0) d\tau_M + u_{x(m-1)}^0(M^0) +$$

$$+ \frac{(\mu_{(j+1)a} - \mu_{(j+1)im})}{\mu(M^0)2\pi} \int_{C_{2m}} u_{xm} G_{Ss,(j+1)} \frac{\partial G_{Ss,(j+1)}}{\partial n} dc =$$

$$= u_{xm}(M^0), M^0 \notin S_{2Cm}, \in \Pi_{j+1}. \quad (16)$$

Вычислим  $u_{xm}(M^0)$ ,  $M^0 \notin S_{2Cm}$ ,  $\in \Pi_{j+1}$ , в слое, где расположена третья иерархическая неоднородность с аномальной плотностью, используя выражение (16). Составляющая нормального акустического поля будет иметь вид:  $u_{x(s-1)}^0(M^0) = u_{xm}(M^0)$ ,  $M^0 \in \Pi_{j+1}$ .

Упругие параметры третьего иерархического включения для всех рангов  $s$  и вмещающего слоя идентичны, а плотность иерархического включения для всех рангов отличается от плотности вмещающей среды. Тогда система уравнений для третьего иерархического включения ранга  $s=1$  имеет следующий вид [5]:

$$\frac{(k_{2(j+1)im}^2 - k_{2(j+1)}^2)}{2\pi} \iint_{S_{3Cs}} u_{xs}(M) G_{Ss,(j+1)}(M, M^0) d\tau_M +$$

$$+ u_{x(s-1)}^0(M^0) = u_{xs}(M^0), M^0 \in S_{3Cs};$$

$$\frac{\mu_{(j+1)im}(k_{2(j+1)im}^2 - k_{2(j+1)}^2)}{\mu(M^0)2\pi} \iint_{S_{3Cs}} u_{xs}(M) G_{Ss,j}(M, M^0) d\tau_M +$$

$$+ u_{x(s-1)}^0(M^0) = u_{xs}(M^0), M^0 \notin S_{3Cs}. \quad (17)$$

Здесь  $G_{Ss,(j+1)}(M, M^0)$  — функция источника сейсмического поля, она совпадает с функцией в работах [7, 8];  $k_{2(j+1)is}^2 = \omega^2(\sigma_{(j+1)is}/\mu_{(j+1)is})$ ;  $\mu_{(j+1)is} = \mu_{(j+1)a}$  — с волновым числом для поперечной волны и параметрами упругости для всех  $s$ ; индекс  $ji$  — свойство среда внутри неоднородности,  $ja$  — вне неоднородности,  $s=1 \dots S$  — число иерархического уровня,  $u_{x(s-1)}^0(M^0) = u_{xm}(M^0)$ ,  $M^0 \in \Pi_{j+1}$ ,

— составляющая нормального акустического поля в слое  $j+1$  при отсутствии третьей неоднородности предыдущего ранга. Вычислим  $u_{xs}(M^0)$ ,  $M^0 \notin S_{3Cs} \in \Pi_{j-1}$  в слое  $j-1$ :

$$\frac{\mu_{(j-1)is}(k_{2(j-1)is}^2 - k_{2(j-1)}^2)}{\mu(M^0)2\pi} \times$$

$$\iint_{S_{1C1}} u_{xs}(M) G_{Ss,(j-1)}(M, M^0) d\tau_M + u_{x(s-1)}^0(M^0) =$$

$$= u_{xs}(M^0), M^0 \in \Pi_{(j-1)}. \quad (18)$$

Величины  $L$ ,  $M$  и  $S$  имеют максимальные значения рангов иерархии для трех включений:

$$L=3, M=3, S=4; \quad (18')$$

$l=l+1$ ;  $m=m+1$ ;  $s=s+1$ . Если  $l < 3$  или  $l=3$ ,  $u_{x(l-1)}^0(M^0) = u_{x(s-1)}^0(M^0)$ ,  $M^0 \notin S_{3Cs}$ ,  $M^0 \in \Pi_{j-1}$ , обратимся к алгоритму (13)–(18). Если  $l > 3$  и  $m=2$ , вычисляем в слое  $j$ ,  $u_{xs}(M^0)$ ,  $M^0 \notin S_{3Cs} \in \Pi_j$ :

$$\frac{\mu_{jis}(k_{2jis}^2 - k_{2j}^2)}{\mu(M^0)2\pi} \iint_{S_{3Cs}} u_{xs}(M) G_{Ss,j}(M, M^0) d\tau_M +$$

$$+ u_{x(s-1)}^0(M^0) = u_{xs}(M^0), M^0 \notin S_{3Cs} \in \Pi_j; \quad (19)$$

$$u_{x(m-1)}^0(M^0) = u_{x(s-1)}^0(M^0), M^0 \in \Pi_j.$$

Перейдем к алгоритму (15)–(18), если  $m=3$ ,  $u_{x(m-1)}^0(M^0) = u_{x(s-1)}^0(M^0)$ ,  $M^0 \in \Pi_j$ . Если  $m > 3$  и  $s < 4$  или  $s=4$ ,  $u_{x(s-1)}^0(M^0) = u_{x(s-1)}^0(M^0)$ ,  $M^0 \in \Pi_{j+1}$ , переходим к выражениям (17), (18).

Если  $s > 4$ , то

$$\frac{\mu_{jis}(k_{2jis}^2 - k_{2j}^2)}{\mu(M^0)2\pi} \iint_{S_{3Cs}} u_{xs}(M) G_{Ss,j}(M, M^0) d\tau_M +$$

$$+ u_{x(s-1)}^0(M^0) = u_{xs}(M^0), M^0 \notin S_{3Cs} \in \Pi_j. \quad (20)$$

Вычислим  $u_{xs}(M^0)$ ,  $M^0 \notin S_{3Cs} \in \Pi_j$  во всех слоях  $j=1, \dots, N$ , используя выражение (20). Алгоритм останавливается, если ранги иерархии становятся больше заданных чисел (18'). Если на некотором иерархическом уровне структура локальной неоднородности распадается на несколько неоднородностей, то двойные и контурные интегралы в выражениях (13)–(20) берутся по всем неоднородностям данного ранга.

**Выводы.** Итерационные алгоритмы моделирования строятся в сейсмическом случае в акустическом приближении для сложной иерархической неоднородности. Впервые предложенный итерационный

алгоритм для моделирования иерархически сложной среды может использоваться для мониторинга исследований устойчивости сложных иерархических структур при различных механических воздействиях. Этот алгоритм может быть распространен на более сложные многограновые иерархические среды с различными физико-механическими функциями.

Следующая статья будет посвящена анализу распространения нелинейных акустических волн через материалы, содержащие иерархические структуры с различными физико-механическими свойствами.

#### Список библиографических ссылок

1. Панин В.Е., Лихачев В.А., Гриняев Ю.В. Структурные уровни деформации твердых тел. Новосибирск: Наука, 1985. 254 с.
2. Хачай О.А., Хачай А.Ю. О комплексировании сейсмических и электромагнитных активных методов для картирования и мониторинга состояния двумерных неоднородностей в  $N$ -слоистой среде. *Вестник ЮУрГУ. Серия "Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника"*. 2011. № 2(219). С. 49—56.
3. Хачай О.А., Хачай А.Ю. Моделирование сейсмического поля в акустическом приближении двухфазных иерархически неоднородных сред. *Вестник ЮУрГУ. Серия "Вычислительная математика и информатика"*. 2014. Т. 3, № 1. С. 33—43.
4. Хачай О.А., Хачай А.Ю. Отражение процессов неравновесной двухфазной фильтрации в нефтенасыщенных иерархических средах в данных активного волнового геофизического мониторинга. *Горный Информационно-аналитический бюллетень*. 2014. № 4. С. 232—238.
5. Хачай О.А., Хачай О.Ю., Хачай А.Ю. Комплексирование акустических, гравитационных и геомеханических полей в иерархических средах. *Горный Информационно-аналитический бюллетень*. 2017. № 4. С. 328—336.
6. Хачай О.А., Хачай А.Ю. Моделирование сейсмического и электромагнитного поля в иерархически неоднородных средах. *Вестник ЮУрГУ. Серия "Вычислительная математика и информатика"*. 2014. Т. 2, № 2. С. 48—55.
7. Хачай А.Ю. Алгоритм решения прямой динамической задачи сейсмологии при возбуждении точечным источником горизонтальной силы, расположенной в произвольном слое  $N$ -слоистой упругой изотропной среды. Информатика и математическое моделирование. Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 2006а. С. 170—278.
8. Хачай А.Ю. Алгоритм решения прямой динамической задачи сейсмологии при возбуждении точечным источником вертикальной силы, расположенной в произвольном слое  $N$ -слоистой упругой изотропной среды. Информатика и математическое моделирование. Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 2006б. С. 279—310.
9. Хачай О.А., Хачай А.Ю. Моделирование распространения сейсмического поля в слоисто-блоковой упругой среде с иерархическими пластическими включениями. *Горный Информационно-аналитический бюллетень*. 2016. № 12. С. 318—326.
10. Кольский Г.Г. Волны напряжений в твердых телах. Москва. Изд-во иностранной литературы, 1955. 216 с.

Поступила в редакцию 21.05.2018 г.

#### АЛГОРИТМ МОДЕЛЮВАННЯ АКУСТИЧНИХ ХВИЛЬ, ЩО ПОШИРЮЮТЬСЯ У ШАРУВАТО-БЛОКОВОМУ СЕРЕДОВИЩІ ЗІ СКЛАДОВИМИ ІЄРАРХІЧНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

О.О. Хачай<sup>1</sup>, А.Ю. Хачай<sup>2</sup>, О.Ю. Хачай<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Інститут геофізики ім. Ю.П. Булашевича УрО РАН, вул. Амундсена, 100, 620016, Єкатеринбург, Російська Федерація, [olgakhachay@yandex.ru](mailto:olgakhachay@yandex.ru)

<sup>2</sup>Уральський Федеральний університет ім. Б.М. Єльцина, вул. Миру, 19, 620002, Єкатеринбург, Російська Федерація, [andrey.khachay@gmail.com](mailto:andrey.khachay@gmail.com), [khachay@yandex.ru](mailto:khachay@yandex.ru)

Геологічне середовище з багаторівневою ієрархічною структурою і властивостями міцності потребує регулярного вивчення стійкості її стану. З цією метою розроблено новий метод моделювання акустичного моніторингу поздовжніми і поперечними хвилями шарувато-блокового середовища з кількома включеннями різних фізико-механічних ієрархічних структур. Розроблено ітераційний процес розв'язання прямої задачі для випадку акустичного поля, що проникає в три ієрархічні включення  $l$ -,  $m$ - і  $s$ -го рангу на основі використання двовимірних інтегрально-диференціальних рівнянь. Ступінь ієрархії включень визначається значеннями їх рангів, які можуть бути різними. Ієрархічні включення розташовані в різних шарах один поверх іншого: верхній шар аномально пластичний, другий — аномально пружний, а третій — аномально густинний. Ступінь заповнення включень кожного рангу для всіх трьох ієрархічних включень може бути різний. Результати моделювання можна використовувати для моніторингу досліджень стійкості геологічних і механічних структур складної ієрархічної будови за різних механічних впливів.

**Ключові слова:** складне ієрархічне середовище, акустичне поле, ітераційний алгоритм, інтегрально-диференціальні рівняння і пряма задача.

# ALGORITHM OF MODELING ACOUSTIC WAVES DISTRIBUTED IN A LAYER-BLOCK MEDIUM WITH COMPOSITE HIERARCHICAL INCLUSIONS

O.A. Khachai<sup>1</sup>, A.Yu. Khachai<sup>2</sup>, O.Yu. Khachai<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Geophysics. Yu.P. Bulashevich UB RAS, Amundsen str., 100, 620016, Ekaterinburg, Russian Federation, olgakhachay@yandex.ru*

<sup>2</sup>*Ural Federal University. B.N. Yeltsin, Mira, 19, 620002, Yekaterinburg str., Russian Federation, andrey.khachay@gmail.com, khachay@yandex.ru*

**Purpose.** A geological environment with a multilevel hierarchical structure and strength properties requires regular study of the stability of its state. For this purpose, a new method was developed for modeling acoustic monitoring by longitudinal and transverse waves of a layered-block medium with several inclusions with different physico-mechanical hierarchical structures.

**Method of research.** An iterative process of solving a direct problem is developed for the case of an acoustic field penetrating into three hierarchical inclusions of  $l$ ,  $m$  and  $s$ -th rank based on the use of two-dimensional integral-differential equations. The degree of inclusion hierarchy is determined by the values of their ranks, which can be different.

**Results.** Hierarchical inclusions are located in different layers one on top of the other: the top layer is anomalously plastic, the second is anomalously resilient, and the third is anomalously dense. The degree of filling of inclusions of each rank for all three hierarchical inclusions can be different.

**Usage.** The simulation results can be used for monitor studies of geological and mechanical structures stability of a complex hierarchical structure under various mechanical influences.

**Keywords:** complex hierarchical environment, acoustic field, iterative algorithm, integral-differential equations and direct problem.

## References:

1. Panin V.E., Likhachev V.A., Grinyaev Yu.V. Structural levels of deformation of solids. Novosibirsk: Science, 1985. 254 p. [in Russian].
2. Hachay O.A., Khachay A.Yu. On the integration of seismic and electromagnetic active methods for mapping and monitoring the state of two-dimensional heterogeneities in an  $N$ -layer medium. *Bulletin of SUSU. A series "Computer technologies, management, radio electronics"*, 2011. no 2(219), pp. 49–56 [in Russian].
3. Hachay O.A., Khachay A.Yu. Modeling of the seismic field in the acoustic approximation of two-phase hierarchically heterogeneous media. *Bulletin of SSSU, series "Computational mathematics and computer science"*, 2014. V. 3, no 1. pp. 33–43 [in Russian].
4. Hachay O.A., Khachay A.Yu. Reflection of nonequilibrium two-phase filtration processes in oil saturated hierarchical media in active wave geophysical monitoring data. *Mining Information and Analytical Bulletin*, 2014. no 4, pp. 232–238 [in Russian].
5. Hachay O.A., Khachai O.Yu., Khachai A.Yu. Integration of acoustic, gravitational and geomechanical fields in hierarchical environments. *Mining Information and Analytical Bulletin*, 2017. no 4, pp. 328–336 [in Russian].
6. Hachay O.A., Khachay A.Yu. Modeling of the seismic and electromagnetic field in hierarchically heterogeneous media. *Bulletin of SSSU, series "Computational mathematics and computer science"*, 2014. V. 2, no 2, pp. 48–55 [in Russian].
7. Khachai A.Yu. An algorithm for solving a direct dynamic seismic problem when a horizontal point layer is excited in an arbitrary layer of an  $N$ -layer elastic isotropic medium. *Informatics and mathematical modeling, Ekaterinburg: USU, 2006a*, pp. 170–278 [in Russian].
8. Khachai A.Yu. Algorithm for solving a direct dynamic seismic problem when excited by a point source of a vertical force located in an arbitrary layer of an  $N$ -layer elastic isotropic medium. *Informatics and mathematical modeling. Ekaterinburg: USU, 2006b*, pp. 279–310 [in Russian].
9. Hachay O.A., Khachay A.Yu. Modeling the propagation of a seismic field in a layered-block elastic medium with hierarchical plastic inclusions. *Mining Information and Analytical Bulletin*, 2016. no 12, pp. 318–326 [in Russian].
10. Kolsky G.G. Stress waves in solids. Moscow. Publishing in foreign literature, 1955. 216 p. [in Russian].