УДК 550.830, 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ИЕРАРХИЧЕСКОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В СЛОИСТО-БЛОКОВОЙ СРЕДЕ ПО ДАННЫМ АКУСТИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА

О.А. Хачай[1], А.Ю. Хачай[2], О.Ю. Хачай[2]

[1]***Институт геофизики им. Ю.П. Булашевича УрО РАН, ул. Амундсена, 100, г. Екатеринбург, 620016, Российская Федерация, e-mail: olgakhachay@yandex.ru***

[2]***Уральский Федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, ул. Мира, 19, г. Екатеринбург, 620002, Российская Федерация, e-mail: andrey.khachay@gmail.com, khachay@yandex.ru***

Процессы разработки нефтегазовых месторождений связаны с движением многофазных многокомпонентных сред, которые характеризуются неравновесными и нелинейными реологическими свойствами. Реальное поведение пластовых систем определяется сложностью реологии движущихся жидкостей и морфологического строения пористой среды, а также многообразием процессов взаимодействия жидкости и пористой среды. При этом пластовая система, из которой требуется извлечь нефть, представляет собой сложную динамическую иерархическую систему. Для решения поставленных задач необходимо создать новую теорию интерпретации волновых полей в рамках усложненной модели: слоисто-блоковой с включениями иерархического типа. Разработан новый подход к интерпретации волновых полей, определению контуров или поверхностей локальных пластических иерархических объектов. Разработан итерационный процесс решения теоретической обратной задачи для случая определения конфигураций 2D иерархических включений k-го ранга. При интерпретации результатов мониторинга следует использовать данные таких систем наблюдения, которые настроены на исследование иерархической структуры среды.

Ключевые слова: иерархическая среда, пластические включения, сейсмическое поле, акустическое приближение, 2D алгоритмы интерпретации, уравнение теоретической обратной задачи.

Введение. Важнейший итог геомеханико-геодинамических исследований XX в. – обнаружение тесной взаимосвязи глобальных геодинамических и локальных геомеханических процессов, обусловленных ведением горных работ, особенно в тектонически активных зонах. Не менее крупный результат исследований – заключение о фундаментальной роли блочно-иерархического строения горных пород и массивов для объяснения существования широкой гаммы нелинейных геомеханических эффектов и возникновения сложных самоорганизующихся геосистем. Иерархическая структура характерна для многих систем, особенно для литосферы Земли, где по результатам геофизических исследований выделено более 30 иерархических уровней – от тектонических плит протяженностью в тысячи километров до отдельных минеральных зерен миллиметрового размера [4]. Таким образом, земная кора представляет собой сплошную среду, которая включает в себя дискретную систему блоков и, как любой синергетический дискретный ансамбль, обладает свойствами иерархичности и самоподобия [2].

При построении математической модели реального объекта в качестве априорной информации необходимо использовать данные активного и пассивного мониторинга, получаемые в ходе текущей эксплуатации объекта. В статьях [9, 10] построены алгоритмы моделирования в электромагнитном случае для 3D неоднородности, в сейсмическом случае для 2D неоднородности при произвольном типе источника возбуждения N-слойной среды с иерархическим упругим включением, расположенным в J-м слое.

В работе [8] предложена концепция поэтапной интерпретации переменного электромагнитного поля. На первом этапе определяются параметры нормального разреза, или параметры вмещающей одномерной немагнитной среды, аномальные проводящие, либо магнитные, включения. На втором этапе осуществляется подбор аномального переменного электромагнитного поля системой сингулярных источников, помещенных в горизонтально-слоистую среду с определенными на первом этапе геоэлектрическими параметрами. На третьем этапе решается теоретическая обратная задача, т. е. при заданных геоэлектрических параметрах вмещающей среды для набора параметров неоднородности определяются контуры этой неоднородности. Получены явные интегро-дифференциальные уравнения теоретической обратной задачи рассеяния двумерного и трехмерного переменного и трехмерного стационарного электромагнитных полей в рамках моделей: проводящее, либо магнитное, тело в ν-м слое проводящего n-слойного полупространства.

В настоящей работе с использованием подхода, изложенного в статьях [6,7], разработаны алгоритмы получения уравнения теоретической обратной задачи для акустического поля (продольной и поперечной акустической волны) с целью построения

© О.А. Хачай, А.Ю. Хачай, О.Ю. Хачай

модели пластической иерархической неоднородности k-го ранга, расположенной в ν-м слое упругого n-слойного полупространства.

Алгоритм решения обратной задачи 2D дифракции продольной упругой волны для N-слойной среды с иерархическим пластическим включением. Пусть односвязная область D из евклидова пространства R^2, ограниченная непрерывно дифференцируемой замкнутой кривой ∂D, расположена в ν-м слое n-слойного полупространства. Пусть эта область содержит в себе K несоосных односвязных иерархических включений, ограниченных непрерывно дифференцируемыми замкнутыми кривыми ∂D_k и простирающихся параллельно оси OX. Границы l_i слоев Π_j ($j = 1, ..., n$) параллельны оси OY плоскости XOY декартовой системы координат. Ось OZ направлена вертикально вниз. Поместим начало координат на верхнюю границу поверхности 1-го слоя и совместим его с точкой, являющейся проекцией на ось OY точки, относительно которой область D – звездная. Пусть $U(y, z)$ – комплекснозначные, дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие соответственно двумерному скалярному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta U + c(M)U = -f(M), \tag{1}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$;

$$c(M) = \begin{cases} c_j; M \in \Pi_j \setminus \overline{D} \, (j = 0, ...n) \\ c_{ak}; M \in D_k \, (k = 1, ...K). \end{cases} \tag{2}$$

Пусть функция $U^1(y, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta U^1 + p(M)U^1 = -f(M), \tag{3}$$

$$p(M) = \begin{cases} c_j; M \in \Pi_j \setminus \overline{D} \, (j = 0, ...n) \\ c_\nu; M \in D_k \, (k = 1, ...K). \end{cases} \tag{4}$$

Рассмотрим сначала случай при $k = 1$. Для $M \in R^2 \setminus \overline{D}\left(j = 0, ..., n\right)$ определим:

$$U^+(M) = U(M) - U^1(M). \tag{5}$$

Функция $U^+(M)$ удовлетворяет уравнению (1). На границах раздела l_j слоев Π_j выполняются граничные условия:

$$\begin{aligned} U_j &= U_{j+1}; \\ U_j^+ &= U_{j+1}^+; \; M \in l_j \, (j = 1, ..., n-1); \\ U_j^1 &= U_{j+1}^1; \end{aligned} \tag{6}$$

$$b_j \frac{\partial U_j}{\partial n} = b_{j+1} \frac{\partial U_{j+1}}{\partial n}; \; b_j \frac{\partial U_j^+}{\partial n} = b_{j+1} \frac{\partial U_{j+1}^+}{\partial n};$$

$$b_j \frac{\partial U_j^1}{\partial n} = b_{j+1} \frac{\partial U_{j+1}^1}{\partial n}; \; M \in l_j; \tag{7}$$

b_j – комплексные коэффициенты ($j = 0, ..., n$), и в общем случае, $b_j \neq b_{j+1}$ на контуре ∂D_k при $k = 1$

$$U_\nu = U_\nu^+ + U_\nu^1. \tag{8}$$

Функция U_ν удовлетворяет уравнению

$$\Delta U_\nu + c_\nu(M)U_\nu = -f(M); \tag{9}$$

U_ν^+ – функция U^+ в слое $\Pi_\nu \notin D$; U_ν^1 – функция U^1 в слое $\Pi_\nu \notin D$. В области D при $k = 1$

$$\begin{aligned} U_a &= U_a^+ + U_a^1; \quad M \in D; \\ \Delta U_a &+ c_a U_a = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Граничные условия на ∂D ($k = 1$):

$$U_a^+ = U_\nu^+; \; b_a \frac{\partial U_a}{\partial n} - b_\nu \left(\frac{\partial U_\nu^+}{\partial n} + \frac{\partial U_\nu^1}{\partial n}\right) = 0. \tag{11}$$

При $M \to \infty$ функции $U(M)$, $U^+(M)$, $U^1(M)$ удовлетворяют условию излучения [5]. Алгоритм вычисления функции U^1, например, приведен в работе [8].

Введем функцию $G(M, M_0)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta G + p(M)G = -\delta(M, M_0) \tag{12}$$

и граничным условиям (6), (7); при $M \to \infty$ функция G удовлетворяют условию излучения [5], при $M \to M_0$ имеет особенность типа $\ln 1/\rho$ (M, M_0):

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}^2. \tag{13}$$

Алгоритм вычисления функции G для случая, когда область D находится в ν-м слое, описан в работе [8]. Введем функцию G^a, которая совпадает с фундаментальным решением уравнения (2) при $k = 1$. Применим формулу Грина [5] для пары функций U^+, G; $(M \in R^2 \setminus \overline{D}, M_0 \in \Pi_i)$ в каждом из слоев Π_j ($j = 0, ..., n$). Проделаем процедуру аналогично [1]: домножим полученные выражения для каждого слоя на b_j, соответственно $j = 0, ..., n$, и сложим их почленно с учетом условий (1)–(4), (6), (7). В результате получим

$$2\pi U^+(M_0) = -(b_\nu / b_i) \int_{\partial D} \left(U_\nu^+(M) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} - G(M, M_0) \frac{\partial U_\nu^+}{\partial n}\right); \; M \in \Pi_\nu; \; M_0 \in \Pi_i. \tag{14}$$

В области D применим формулу Грина для пары функций $U_a(M)$, $G^a(M, M_0)$. В результате запишем

$$0 = \int_{\partial D} \left(U_a(M) \frac{\partial G^a(M, M_0)}{\partial n} - G^a(M, M_0) \frac{\partial U_a}{\partial n}\right) dl. \tag{15}$$

Сложим выражения (14) и (15), учитывая условия (10), (11), а также соотношение [8]:

$$0 = (-b_\nu / b_i) \int_{\partial D} \left(U_\nu^1(M) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} - G(M, M_0) \times \frac{\partial U_\nu^1}{\partial n}\right) dl; \; M \in \overline{D}; \; M_0 \in \Pi_i. \tag{16}$$

Тогда

© О.А. Хачай, А.Ю. Хачай, О.Ю. Хачай

$$2\pi U^{+}(M_0)=\int_{\partial D}((U_\nu^{+}(M)+U_\nu^{1}(M))(\frac{\partial G^{a}(M,M_0)}{\partial n}-$$

$$-(b_\nu/b_i)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n})-b_\nu(\frac{\partial U_\nu^{+}}{\partial n}+\frac{\partial U_\nu^{1}}{\partial n})\times$$

$$\times\left[(1/b_a)G^{a}(M,M_0)-(1/b_i)G(M,M_0)\right]dl. \quad (17)$$

Уравнение (17) является явным уравнением теоретической обратной задачи для двухмерного скалярного уравнения Гельмгольца в слоистой среде с однородным включением при заданных значениях граничных условий [6–8]. В результате решения интегро-дифференциального уравнения (17) относительно функции $r(\varphi)$, описывающей контур ∂D искомого однородного объекта, удается ее определить при известных значениях физических параметров вмещающей среды и искомого объекта, а также при заданных значениях функц й $U^{+},G,G^{a},U_\nu^{+},U_\nu^{1}$.

Согласно [3, 9], задача о дифракции продольной упругой волны на двумерной пластической неоднородности иерархического типа, расположенной в слое n-слойной среды в рамках описанной модели, сводится к решению аналогичной задачи с учетом нижеследующих изменений. Уравнение теоретической обратной задачи (17) для скалярного уравнения Гельмгольца, к которому сводится наша задача, остается в силе. При этом

$$b_\nu=\xi_{1\nu};\, b_i=\xi_{1i};\, b_a=\xi_{1a}. \quad (18)$$

Здесь $\xi_{1\nu},\xi_{1i},\xi_{1a},\rho_\nu,\rho_i,\rho_a$ — значения упругого параметра Ламе и плотность в n-м слое, где находится точка M_0, и внутри неоднородности при $k=1$. Важным отличием настоящей задачи от рассмотренной ранее является то, что

$$\xi_{1a}=\xi_{1ak}+\xi'_{1ak}\omega_{1ak} \quad (19)$$

при всех k. Физически это означает, что аномалия в акустическом поле создается аномалией напряженного состояния среды, зависящего от частоты, определяемой внутренним строением включения k-го ранга:

$$U^{+}=\varphi^{+};\, U_\nu^{+}=\varphi_\nu^{+};\, U_\nu^{1}=\varphi_\nu^{1}, \quad (20)$$

где φ − потенциал, связанный с вектором смещения соотношением:

$$G(M,M_0)=G_{PS}(M,M_0);$$
$$G^{a}(M,M)=G_{PS}^{a}(M,M_0);\partial D,dl,$$
$$k_{1ak}^{2}=\omega^{2}\frac{\rho_{ak}}{\xi_{1a}};\, k_{1\nu}^{2}=\omega^{2}\frac{\rho_\nu}{\xi_{1\nu}}; \quad (21)$$

В работе [12] выписан алгоритм вычисления функции Грина $G_{PS}(M,M_0)$.

Таким образом, уравнение теоретической обратной задачи при $k=1$ записывается в виде

$$2\pi\varphi^{+}(M_0)=\int_{\partial D1}\left[\varphi_\nu^{+}(M)+\varphi_\nu^{1}(M)\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\partial G_{PS}^{a1}(M,M_0)}{\partial n}-(\xi_{1\nu}/\xi_{1i})\frac{\partial G_{PS}(M,M_0)}{\partial n}\right]-$$

$$-\xi_{1\nu}(\frac{\partial\varphi_\nu^{+}}{\partial n}+\frac{\partial\varphi_\nu^{1}}{\partial n})\left[(1/\xi_{1a})G_{PS}^{a1}(M,M_0)-\right.$$

$$\left.-(1/\xi_{1i})G_{PS}(M,M_0)\right]dl. \quad (22)$$

Пусть $k=2$, т. е. искомый объект представляет собой иерархическое включение: с упругим параметром Ламе $\xi_{1a}=\xi_{1a1}+\xi'_{1a1}\omega_{1a1}$ и плотностью ρ_{a1}; ∂D_1 — контур внешнего включения и с упругим параметром Ламе $\xi_{1a}=\xi_{1a2}+\xi'_{1a2}\omega_{1a2}$, плотностью ρ_{a2}; ∂D_2 — контур внутреннего включения. Включения несоосные. Требуется восстановить оба контура. Для решения нашей задачи согласно выражению (19) $\xi_{1a}=\xi_{1a1}+\xi'_{1a1}\omega_{1a1}$, а в выражении (21)

$$\partial D=\partial D_1;\quad dl=dl_1;\quad G_{PS}^{a}=G_{PS}^{a1};\quad \frac{\partial}{\partial n}(G_{PS}^{a})=$$

$$=\frac{\partial}{\partial n}(G_{PS}^{a1});\quad k_{1a}^{2}=k_{1a1}^{2}=\omega^{2}\frac{\rho_\nu}{\xi_{1a}}.$$

Решив уравнение (22) относительно функции $r_1(\varphi)$, описывающей контур ∂D_1, вычислим функции φ; φ^{+}; φ^{1} по алгоритму решения прямой задачи [10, 11] внутри и вне неоднородности, помещенной в слоистую среду; φ^{1} — потенциал упругого поля в слоистой среде при отсутствии неоднородности:

$$\varphi(M_0)=\frac{\rho_\nu}{\rho_{a1}}\varphi^{1}(M_0)+\frac{k_{1a}^{2}-k_{1\nu}^{2}}{2\pi}\iint_{S1}\varphi(M)G_{PS}(M,$$

$$M_0)dS_1+\frac{\rho_\nu-\rho_{a1}}{2\pi\rho_{a1}}\oint_{D_1}G_{PS}\frac{\partial\varphi(M)}{\partial n}dD;\, M_0\in S_1, \quad (23)$$

$$\varphi^{+}(M_0)=\varphi^{1}(M_0)+\frac{\rho_a(k_{1a}^{2}-k_{1\nu}^{2})}{2\pi\,\rho(\mathrm{M}_0)}\iint_{S1}\varphi(M)G_{PS}(M,$$

$$M_0)dS_1+\frac{(\rho_\nu-\rho_{a1})}{2\pi\,\rho(M_0)}\oint_{D_1}G_{PS}\frac{\partial\varphi(M)}{\partial n}dD;\, M_0\notin S_1. \quad (24)$$

На этом первый итерационный цикл заканчивается, переходим ко второму итерационному циклу $k=2$.

Вычисленную функцию $\varphi(M_0)$ (24) обозначаем, как: $\varphi^{1(k-1)}$; в выражении (19) $\xi_{1a}=\xi_{1a2}+\xi'_{1a2}\omega_{1a2}$, в выражении (21)

$$\partial D=\partial D_2;\, dl=dl_2;\, G_{PS}^{a}=G_{PS}^{a2};\,\frac{\partial}{\partial n}(G_{PS}^{a})=$$

$$=\frac{\partial}{\partial n}(G_{PS}^{a2});\, k_{1a}^{2}=k_{1a2}^{2}=\omega^{2}\frac{\rho_\nu}{\xi_{1a}}. \quad (25)$$

Уравнение (22) переписываем в виде

$$2\pi\varphi^{+}(M_0)=\int_{\partial D2}\left[(\varphi_\nu^{+}(M)+\varphi_\nu^{1(k-1)}(M)\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\partial G_{PS}^{a}(M,M_0)}{\partial n}-(\xi_{1\nu}/\xi_{1i})\frac{\partial G_{PS}(M,M_0)}{\partial n}\right]-$$

© О.А. Хачай, А.Ю. Хачай, О.Ю. Хачай

$$-\xi_{1\nu}\left(\frac{\partial\varphi_\nu^+}{\partial n}+\frac{\partial\varphi_\nu^{1(k-1)}}{\partial n}\right)\Big[(1/\xi_{1a})G_{PS}^a(M,M_0)-$$

$$-(1/\xi_{1i})G_{PS}(M,M_0)\Big]dl_2. \qquad (26)$$

Решаем уравнение (26) относительно функции $r_2(\varphi)$, описывающей контур ∂D_2.

Если $k = 2$, то задача считается решенной, если $k > 2$, $k = k + 1$ – итерационный процесс продолжается. Вычисляем функции φ^{k-1}, $\varphi^{+(k-1)}$ по алгоритму решения прямой задачи внутри и вне иерархической неоднородности ранга $k-1$, помещенной в слоистую среду (физические параметры слоистой среды остаются неизменными) [10, 11]:

$$\varphi^{k-1}(M_0)=\frac{\rho_\nu}{\rho_{a(k-1)}}\varphi^{1(k-2)}(M_0)+\frac{k_{1a}^2-k_{1\nu}^2}{2\pi}\times$$

$$\times\iint\limits_{S(k-1)}\varphi^{k-1}(M)G_{PS}(M,M_0)dS_{(k-1)}+\frac{\rho_\nu-\rho_{a(k-1)}}{2\pi\rho_{a(k-1)}}\times$$

$$\times\int\limits_{\partial D(k-1)}G_{PS}(M)\frac{\partial\varphi^{k-1}}{\partial n}dD_{k-1};\ M_0\in S_{(k-1)}, \qquad (27)$$

$$\varphi^{k-1}(M_0)=\varphi^{1(k-2)}(M_0)+\frac{\rho_{a(k-1)}(k_{2a}^2-k_{2\nu}^2)}{2\pi\,\rho(\mathrm{M}_0)}\times$$

$$\times\iint\limits_{S(k-1)}\varphi^{k-1}(M)G_{SS}(M,M_0)dS_{(k-1)}+\frac{(\rho_\nu-\rho_{a(k-1)})}{2\pi\rho(M_0)}\times$$

$$\times\int\limits_{\partial D(k-1)}G_{PS}(M)\frac{\partial\varphi^{k-1}}{\partial n}dD_{k-1};\ M_0\notin S_{(k-1)}. \qquad (28)$$

Вычисленную функцию $u_x^{k-1}(M_0)$(28) обозначим, как $u_x^{1(k-1)}$;

в выражении (19) $\xi_{1a}=\xi_{1a3}+\xi'_{1a3}\omega_{1a3}$, в выражении (21)

$$\partial D=\partial D_k;\ dl=dl_k;\ G_{PS}^a=G_{PS}^{ak};$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(G_{PS}^a)=\frac{\partial}{\partial n}(G_{PS}^{ak});\ k_{1a}^2=k_{1ak}^2=\omega^2\frac{\rho_\nu}{\xi_{1a}}. \qquad (29)$$

Уравнение (22) переписываем в виде

$$2\pi\varphi^+(M_0)=\int\limits_{\partial D}\Big[(\varphi_\nu^+(M)+\varphi_\nu^{1(k-1)}(M)\Big]\times$$

$$\times\left[\frac{\partial G_{pS}^{PS}(M,M_0)}{\partial n}-(\xi_{1\nu}/\xi_{1i})\frac{\partial G_{PS}(M,M_0)}{\partial n}\right]-$$

$$-\xi_{1\nu}\left[\frac{\partial\varphi^+}{\partial n}+\frac{\partial\varphi_\nu^{1(k-1)}}{\partial n}\right]\Big[(1/\xi_{1a})G_{PS}^a(M,M_0)-(1/\xi_{1i})\times$$

$$\times G_{PS}^a(M,M_0)-(1/\xi_{1i})G_{PS}(M,M_0)\Big]dl. \qquad (30)$$

Решаем уравнение (26) относительно функции $r_k(\varphi)$, описывающей контур ∂D, $k = k + 1$. Итерационный процесс (27)–(30) продолжается до $k = K$.

Алгоритм решения обратной задачи 2D дифракции линейно поляризованной упругой поперечной волны для *N*-слойной среды с иерархическим пластическим включением. Согласно [3, 9], задача о дифракции линейно поляризованной упругой поперечной волны на двумерной упругой неоднородности иерархического типа, расположенной в слое ν n-слойной среды в рамках описанной модели сводится к решению аналогичной задачи с учетом следующих ниже изменений. Уравнение теоретической обратной задачи (17) для скалярного уравнения Гельмгольца, к которому сводится наша задача, остается в силе (18), при этом

$$b_\nu=\xi_{2\nu};\ b_i=\xi_{2i};\ b_a=\xi_{2a}. \qquad (31)$$

Здесь $\xi_{2\nu},\xi_{2i},\xi_{2a},\rho_\nu,\rho_i,\rho_a$ — значения упругого параметра Ламе и плотность в ν-м слое, в слое, где находится точка M_0, и внутри неоднородности при $k = 1$. Важным отличием настоящей задачи от рассмотренной ранее является то, что

$$\xi_{2a}=\xi_{2ak}+\xi'_{2ak}\omega_{2ak} \qquad (32)$$

при всех k. Физически это означает, что аномалия в акустическом поле создается аномалией напряженного состояния среды, зависящего от частоты, определяемой внутренним строением включения k-го ранга:

$$U^+=u_x^+;\ U_\nu^+=u_{x\nu}^+;\ U_\nu^1=u_{x\nu}^1, \qquad (33)$$

где u_x — составляющая вектора смещения, отличная от нуля для выбранной модели;

$$G(M,M_0)=G_{SS}(M,M_0);\ G^a(M,M)=$$

$$=G_{SS}^a(M,M_0);\ \partial D,dl,$$

$$k_{2a}^2=\omega^2\frac{\rho_\nu}{\xi_{2a}};\ k_{2\nu}^2=\omega^2\frac{\rho_\nu}{\xi_{2\nu}}. \qquad (34)$$

Алгоритм вычисления функции Грина $G_{ss}(M, M_0)$ выписан в работе [12].

Таким образом, уравнение теоретической обратной задачи при $k = 1$ записывается в виде

$$2\pi u_x^+(M_0)=\int\limits_{\partial D_1}\Big[(M)+u_{x\nu}^1(M)\Big](u_{x\nu}^+)\times$$

$$\times\left[\frac{\partial G_{SS}^{a1}(M,M_0)}{\partial n}-(\xi_{2\nu}/\xi_{2i})\frac{\partial G_{SS}(M,M_0)}{\partial n}\right]-$$

$$-\xi_{2\nu}\left(\frac{\partial u_x^+}{\partial n}+\frac{\partial u_{x\nu}^1}{\partial n}\right)\Big[(1/\xi_{2a})G_{SS}^{a1}(M,M_0)-$$

$$-(1/\xi_{2i})G_{SS}(M,M_0)\Big]dl; \qquad (35)$$

$$\xi_{2a}=\xi_{2a1}+\xi'_{2a1}\omega_{2a1}, \qquad (35')$$

$$\xi_{2a}=\xi_{2a2}+\xi'_{2a2}\omega_{2a2} \qquad (35'')$$

Пусть $k = 2$, т. е. искомый объект представляет собой иерархическое включение: с упругим параметром Ламе ξ_{2a}(35′) и плотностью ρ_ν; ∂D_1— контур внешнего включения с упругим параметром Ламе ξ_{2a}(35″) и плотностью ρ_ν; ∂D_2— контур внутреннего

© О.А. Хачай, А.Ю. Хачай, О.Ю. Хачай

включения. Включения несоосные. Требуется восстановить оба контура. Для решения нашей задачи при $k = 1 \xi_{2a}$ (35′) и

$$\partial D = \partial D_1;\ dl = dl_1;\ G_{SS}^a = G_{SS}^{a1};\ \frac{\partial}{\partial n}(G_{SS}^a) = \\ = \frac{\partial}{\partial n}(G_{SS}^{a1});\ k_{2a}^2 = \omega^2 \frac{\rho_\nu}{\xi_{2a}}.$$

Решив уравнение $r_1(\varphi)$ (35) относительно функции $u_x; u_x^+; u_x^1$, описывающей контур u_x^1, вычисляем функции по алгоритму решения прямой задачи [10, 11] внутри и вне неоднородности, помещенной в слоистую среду; u_x^1— компонента упругого поля в слоистой среде при отсутствии неоднородности:

$$u_x(M_0) = \frac{\xi_{2\nu}}{\xi_{2a}} u_x^1(M_0) + \frac{k_{2a}^2 - k_{2\nu}^2}{2\pi} \iint\limits_{S1} u_x(M) G_{SS} \times \\ \times (M, M_0) dS_1 + \frac{\xi_{2\nu} - \xi_{2a}}{2\pi \xi_{2a}} \int\limits_{\partial D_1} u_x(M) \frac{\partial G_{SS}}{\partial n} dl; \\ M_0 \in S_1. \tag{36}$$

$$u_x(M_0) = u_x^1(M_0) + \frac{\xi_{2a}(k_{2a}^2 - k_{2\nu}^2)}{2\pi\, \xi_2(\mathrm{M}_0)} \iint\limits_{S1} u_x(M) G_{SS} \times \\ \times (M, M_0) dS_1 + \frac{\xi_{2\nu} - \xi_{2a}}{2\pi \xi_{2a}} \int\limits_{\partial D_1} u_x(M) \frac{\partial G_{SS}}{\partial n} dl; \\ M_0 \in S_1. \tag{37}$$

На этом первый итерационный цикл заканчивается, и переходим ко второму итерационному циклу $k = 2$. Вычисленную функцию $u_x(M_0)$ (37) обозначим как

$$u_x^{1(k-1)};\ \xi_{2a}(35''), \partial D = \partial D_2;\ dl = dl_2;\ G_{SS}^a = G_{SS}^{a2}; \\ \frac{\partial}{\partial n}(G_{SS}^a) = \frac{\partial}{\partial n}(G_{SS}^{a2});\ k_{2a}^2 = \omega^2 \frac{\rho_\nu}{\xi_{2a}}. \tag{38}$$

Уравнение (35) переписываем в виде

$$2\pi u_x^+(M_0) = \int\limits_{\partial D_2} \left[(u_{x\nu}^+)(M) + u_{x\nu}^{1(k-1)}(M) \right] \times \\ \times \left[\frac{\partial G_{SS}^a(M, M_0)}{\partial n} - (\xi_{2\nu}/\xi_{2i}) \frac{\partial G_{SS}(M, M_0)}{\partial n} \right] - \\ -\xi_{2\nu} \left(\frac{\partial u_x^+}{\partial n} + \frac{\partial u_{x\nu}^{1(k-1)}}{\partial n} \right) \left[(1/\xi_{2a}) G_{SS}^a(M, M_0) - \\ - (1/\xi_{2i}) G_{SS}(M, M_0) \right] dl_2. \tag{39}$$

Решаем уравнение (39) относительно функции $r_2(\varphi)$, описывающей контур ∂D_2.

Если $K = 2$, то задача считается решенной, если $k > 2$, $k = k + 1$ – итерационный процесс продолжается. Вычисляем функции $u_x^{k-1}; u_x^{+(k-1)}$ по алгоритму решения прямой задачи внутри и вне иерархической неоднородности ранга $k-1$, помещенной в слоистую среду (физические параметры слоистой среды остаются неизменными) [10, 11]:

$$u_x^{k-1}(M_0) = \frac{\xi_{2\nu}}{\xi_{2a}} u_x^{1(k-2)}(M_0) + \frac{k_{2a(k-1)}^2 - k_{2\nu}^2}{2\pi} \times \\ \times \iint\limits_{S(k-1)} u_x^{k-1}(M) G_{SS}(M, M_0) dS_{(k-1)} + \\ + \frac{\xi_{2\nu} - \xi_{2a}}{2\pi \xi_{2a}} \int\limits_{\partial D(k-1)} u_x^{k-1}(M) \frac{\partial G_{SS}}{\partial n} dl_{k-1};\ M_0 \in S_{(k-1)}, \tag{40}$$

$$u_x^{k-1}(M_0) = u_x^{1(k-2)}(M_0) + \frac{\xi_{2a}(k_{2a}^2 - k_{2\nu}^2)}{2\pi\, \xi_2(\mathrm{M}_0)} \times \\ \times \iint u_x^{k-1}(M) G_{SS}(M, M_0) dS_{(k-1)} + \\ + \frac{(\xi_{2\nu} - \xi_{2a})}{2\pi \xi_2(M_0)} \int\limits_{\partial D(k-1)} u_x^{k-1}(M) \frac{\partial G_{SS}}{\partial n} dl_{k-1};\ M_0 \notin S_{(k-1)}. \tag{41}$$

Вычисленную функцию u_x^{k-1} (M)(28) обозначаем, как $u_x^{1(k-1)}$;

$$\xi_{2a} = \xi_{2a3} + \xi'_{2a3} \omega_{2a3};$$

$$\partial D = \partial D_k;\ dl = dl_k;\ G_{SS}^a = G_{SS}^{ak};\ \frac{\partial}{\partial n}(G_{SS}^a) = \\ = \frac{\partial}{\partial n}(G_{SS}^{ak});\ k_{2a}^2 = \omega^2 \frac{\rho_\nu}{\xi_{2a}}. \tag{42}$$

Уравнение (39) переписываем в виде

$$2\pi u_x^+(M_0) = \int\limits_{\partial D} \left[(M) + u_{x\nu}^{1(k-1)}(M) \right] \times \\ \times \left[\left(\frac{\partial G_{SS}^a(M, M_0)}{\partial n} - (\xi_{2\nu}/\xi_{2i}) \frac{\partial G_{SS}(M, M_0)}{\partial n} \right) \right] - \\ -\xi_{2\nu} \left(\frac{\partial u_x^+}{\partial n} + \frac{\partial u_{x\nu}^{1(k-1)}}{\partial n} \right) \left[(1/\xi_{2a}) G_{SS}^a(M, M_0) - \\ - (1/\xi_{2i}) G_{SS}(M, M_0) \right] dl. \tag{43}$$

Решаем уравнение (26) относительно функции $r_k(\varphi)$, описывающей контур ∂D, $K = k + 1$. Итерационный процесс (40)–(43) продолжается до $k = K$.

Заключение. В работе рассмотрена проблема построения алгоритма решения обратной задачи с использованием уравнения теоретической обратной задачи для 2D уравнения Гельмгольца. Получено явное уравнение теоретической обратной задачи для случаев рассеяния продольной и линейно поляризованной упругой волны в слоистой упругой среде с иерархическим пластическим включением. Построен итерационный алгоритм определения контуров несоосных включений k-го ранга в иерархической структуре с последовательным использованием решения прямой задачи вычисления упругого поля для соответствующей волны k–1 ранга. С увеличением степени иерархичности структуры среды увеличивается степень пространственной нелинейности распределения составляющих сейсмического поля в акустическом приближении, что предполагает исключение методов линеаризации задачи при создании методов интерпретации. Эта

© О.А. Хачай, А.Ю. Хачай, О.Ю. Хачай

проблема неразрывно связана с решением обратной задачи для распространения сейсмического поля в таких сложных средах с использованием явных уравнений теоретической обратной задачи. Впервые выписано уравнение для определения поверхности аномально напряженного включения в иерархической слоисто-блоковой среде по данным акустического мониторинга. На практике с использованием этого алгоритма по данным акустического мониторинга можно локализовать область возможного очага горного удара либо готовящегося землетрясения, связанного с эффектом пластичности среды, и точнее оценить степень аномальных упругих напряжений.

Список библиографических источников

1. Дмитриев В.И. Дифракция плоского электромагнитного поля на цилиндрических телах, расположенных в слоистых средах. *Вычислительные методы и программирование*. М.: Изд-во МГУ, 1965. Вып. 3. С. 307–315.
2. Кочарян Г.Г., Спивак А.А. Динамика деформирования блочных массивов. М.: ИКЦ "Академкнига", 2003. 424 с.
3. Купрадзе В.Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1950. 280 с.
4. Прангишвили И.В., Пащенко Ф.Ф., Бусыгин Б.П. Системные законы и закономерности в электродинамике, природе и обществе. М.: Наука, 2001. 525 с.
5. Стрэттон Дж. Теория электромагнетизма. М.; Л.: ОГИЗ, 1948. 409 с.
6. Хачай О.А. Об интерпретации двумерных переменных и трехмерных стационарных аномалий электромагнитного поля. *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1989. № 10. С. 50–58.
7. Хачай О.А. О решении обратной задачи для трехмерных переменных электромагнитных полей. *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1990. № 2. С. 55–59.
8. Хачай О.А. Математическое моделирование и интерпретация переменного электромагнитного поля в неоднородной коре и верхней мантии Земли: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Свердловск: ИГФ УрО РАН, 1994. 314 с.
9. Хачай О.А., Хачай А.Ю. О комплексировании сейсмических и электромагнитных активных методов для картирования и мониторинга состояния двумерных неоднородностей в *N*-слойной среде. *Вестник ЮУРГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника»*. 2011. № 2(219). С. 49–56.
10. Хачай О.А., Хачай А.Ю. Моделирование электромагнитного и сейсмического поля в иерархически неоднородных средах. *Вестник ЮУРГУ. Серия «Вычислительная математика и информатика»*. 2013. Т. 2, № 2. С. 48–55.
11. Хачай О.А., Хачай А.Ю. Моделирование распространения сейсмического поля в слоисто-блоковой упругой среде с иерархическими пластическими включениями. *Горный Информационный Аналитический Бюллетень*. 2016. № 12. С. 318–326.
12. Хачай А.Ю. Алгоритмы для математического моделирования переменных электромагнитных и сейсмических полей в источниковом приближении: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург: УрГУ имени А.М. Горького, 2007.176 с.

Поступила в редакцию 22.05.2017 г.

ВИЗНАЧЕННЯ ПОВЕРХНІ ІЄРАРХІЧНОГО ПЛАСТИЧНОГО ВКЛЮЧЕННЯ У ШАРУВАТО-БЛОКОВОМУ СЕРЕДОВИЩІ ЗА ДАНИМИ АКУСТИЧНОГО МОНІТОРИНГУ

О.О. Хачай[1], А.Ю. Хачай[2], О.Ю. Хачай[2]

[1]*Інститут геофізики ім. Ю.П. Булашевича Уральського відділення РАН, вул. Амундсена, 100, м. Єкатеринбург, 620016, Російська Федерація, e-mail: olgakhachay@yandex.ru*

[2]*Уральський Федеральний університет ім. Б.М. Єльцина, вул. Миру, 19, м. Єкатеринбург, 620002, Російська Федерація, e-mail: andrey.khachay@gmail.com, khachay@yandex.ru*

Процеси розробки нафтогазових родовищ пов'язані з рухом багатофазних, багатокомпонентних середовищ, які характеризуються нерівноважними і нелінійними реологическими властивостями. Реальна поведінка пластових систем визначається складністю реології рухомих рідин і морфологічної будови пористого середовища, а також різноманітністю процесів взаємодії між рідиною і пористим середовищем. При цьому пластова система, з якої потрібно видобути нафту, є складною динамічною ієрархічною системою. Для розв'язання поставлених задач необхідно створити нову теорію інтерпретації хвильових полів у межах ускладненої моделі: шарувато-блокової з включеннями ієрархічного типу. Розроблено новий підхід до інтерпретації хвильових полів, визначення контурів або поверхонь локальних пластичних ієрархічних об'єктів. Розроблено ітераційний процес розв'язання теоретичної оберненої задачі для випадку визначення конфігурацій 2D ієрархічних включень *k*-го рангу. При інтерпретації результатів моніторингу слід використовувати дані таких систем спостереження, які налаштовані на дослідження ієрархічної структури середовища.

Ключові слова: ієрархічне середовище, пластичні включення, сейсмічне поле, акустичне наближення, 2D алгоритми інтерпретації, рівняння теоретичної оберненої задачі.

© О.А. Хачай, А.Ю. Хачай, О.Ю. Хачай

DEFINING THE 2D SURFACE OF THE ANOMALY PLASTIC HIERARCHICAL OBJECT LOCATED IN THE LAYERED BLOCKED GEOLOGICAL MEDIUM, USING THE DATA OF ACOUSTIC MONITORING

O.A. Hachay[1], A.Y. Khachay[2], O.Y. Khachay[2]
[1]*Institute of Geophysics, Ural Branch of of the Russian Academy of Sciences, 100, Amundsen Str., Ekaterinburg, 620016, Russian Federation, e-mail: olgakhachay@yandex.ru*
[2]*Ural Federal University, 19, Mira Str., Ekaterinburg, 620002, Russian Federation, e-mail: andrey.khachay@gmail.com, khachay@yandex.ru*

Purpose. Geological medium is an open system influenced by outer and inner factors that can bring it to an unstable state. That non stability as a rule occurres locally and these zones are named dynamically active elements, being indicators of potential catastrophic sources. These objects differ from the embedded geological medium in their structural forms, which are often of the hierarchical type. The process of their activisation can be investigated using wave fields monitoring. For that purpose we developed earlier new algorithms of modeling wave field propagation through the local objects with a hierarchical structure. Here we have worked out a new approach to interpreting the distribution of wave fields to define the contours of these local plastic hierarchical objects.
Design/methodology/approach. We have developed an algorithm for constructing the equation of the theoretical inverse problem for a 2-D linear polarized longitudinal elastic wave by excitation of the N-layered elastic medium with hierarchic plastic inclusion located in the ν–th elastic layer. We also suggest an iteration process of solving the inverse problem for the case of certain configurations of hierarchical inclusions 2D k-th rank.
Findings. Theory proves that for such a complicated medium each wave field contains its own information about the inner structure of the hierarchical inclusion. Therefore it is ncessary to interpret the monitoring data for each wave field apart, and not mixes the data base. When interpreting the results of the monitoring it is necessary to use the data of such systems that are configured to study the hierarchical structure of the medium.
Practical value/implications. These results may serve as a basis for constructing new systems of monitoring observations of dynamical geological systems. They may be useful, in particular, in preventing rock shocks in deep mines by their exploitation or natural hazards. Moreover, the findings could prove inevitable in developing new systems of oil and gas out working using mining approaches.

Keywords: hierarchic medium, seismic field, algorithms of interpretation, equation of theoretical inverse problem.

References:

1. Dmitriev V.I. Difraction of 2D electromagnetic field on cylindrical bodies, located in layered media. *Computational methods and programming.* Moscow: Publishing of Moscow State University, 1965, iss. 3. pp. 307-315 [in Russian].
2. Kocharjan G.G., Spivak A.A. Dynamics of deformation block massive. Moscow: Publishing of IKTS “Akademkniga”, 2003, 424 p. [in Russian].
3. Kupradze V.D. Boundary problems of the theory of oscillations and integral equations. Moscow, Leningrad: Publishing Izdatelstvo techniko-teoreticheskoj literaturi, 1950. 280 p. [in Russian].
4. Prangishvilli I.V., Pashchenko F.F., Busigin B.P. System laws and rules in electrodynamics, nature and society. Moscow: Nauka, 2001, 525 p. [in Russian].
5. Stratton Dg. Theory of electromagnetism. Moscow; Leningrad: OGIZ, 1948. 409 p.
6. Hachay O.A. About interpretation of 2D alternating and 3D stationary anomalies of electromagnetic field. *Izvestija AN USSR. Physics of the Earth*, 1989, no 10, pp. 50-58 [in Russian].
7. Hachay O.A. About the solution of 3D alternating electromagnetic fields. *Izvestija AN USSR. Physics of the Earth,* 1990, no. 2, pp. 55-59 [in Russian].
8. Hachay O.A. Mathematical modeling and interpretation of alternating electromagnetic field in heterogeneous crust and mantle of the Earth. Dissertation of doctor of physics and mathematics. Sverdlovsk. IGF UB RAS, 1994, 314 p. [in Russian].
9. Hachay O.A., Khachay A.Y. About Integrating Seismic and Electromagnetic Active Methods for Mapping and Monitoring of the State of 2D Heterogeneous Objects in N-layered medium. *Bulletin of South Ural State University. Series ”Computer technologies, control, radioelectronics”*, 2011, no. 2 (219), pp. 49-56 [in Russian].
10. Hachay O.A., Khachay A.Y. Modeling of electromagnetic and seismic fields in the hierarchic heterogeneous media. *Bulletin of South Ural State University. Series “Computational mathematics and informatics”*, 2013, V. 2, no. 2, pp. 48-55 [in Russian].
11. Hachay O.A., Khachay A.Y. Modeling of seismic fields in the hierarchic heterogeneous media with plastic inclusions. *GIAB*, 2016, no. 12, pp. 318-326 [in Russian].
12. Khachay A.Y. Algorithms for mathematical modeling of alternating electromagnetic and seismic fields. PhD dissertation. Ekaterinburg: Publishing of the Ural state university named by M. Gorkij. 2007, 176 p. [in Russian].

Received 22/05/2017

© О.А. Хачай, А.Ю. Хачай, О.Ю. Хачай